Racine carrée simple précision sur processeur entier

Guillaume Revy
–
Groupe de travail Arénaire (27/04/07)

Contexte et objectifs

- implantation logicielle de fonctions algébriques simple précision (racine carrée, racine carrée inverse, ...)
  - $\longrightarrow$ processeurs entiers de la famille ST200

- processeurs utilisés dans les systèmes embarqués
- domaine de l'audio et la vidéo (téléphonie mobile, TV haute définition...)
  - $\longrightarrow$ utilisation importante de la racine carrée

$\Rightarrow$ utiliser au mieux les caractéristiques de l'architecture ST200
  - $\longrightarrow$ rapidité et précision : arrondi correct au plus près

Caractéristiques de l'architecture ST200

- processeurs entiers 32 bits
  - $\longrightarrow$ uniquement des opérations entières (virgule fixe)
  - $\longrightarrow$ émulation de la virgule flottante
- processeurs VLIW
  - $\longrightarrow$ plusieurs opérations en parallèle
  - $\longrightarrow$ opérations regroupées en *bundles*
- 4 voies : 4 opérations / cycle
  - $\longrightarrow$ au plus 2 multiplications / cycle
- latence des opérations : 1 cycle (3 cycles pour la multiplication)
- qualité visée : arrondi au plus près sans nombres dénormalisés

Caractéristiques de l'architecture ST200

- processeurs entiers 32 bits
  - $\longrightarrow$ uniquement des opérations entières (virgule fixe)
  - $\longrightarrow$ émulation de la virgule flottante
- processeurs VLIW
  - $\longrightarrow$ plusieurs opérations en parallèle
  - $\longrightarrow$ opérations regroupées en *bundles*
- 4 voies : 4 opérations / cycle
  - $\longrightarrow$ au plus 2 multiplications / cycle
- latence des opérations : 1 cycle (3 cycles pour la multiplication)
- qualité visée : arrondi au plus près sans nombres dénormalisés

Caractéristiques de l'architecture ST200

- processeurs entiers 32 bits
  - $\longrightarrow$ uniquement des opérations entières (virgule fixe)
  - $\longrightarrow$ émulation de la virgule flottante
- processeurs VLIW
  - $\longrightarrow$ plusieurs opérations en parallèle
  - $\longrightarrow$ opérations regroupées en *bundles*
- 4 voies : 4 opérations / cycle
  - $\longrightarrow$ au plus 2 multiplications / cycle
- latence des opérations : 1 cycle (3 cycles pour la multiplication)
- qualité visée : arrondi au plus près sans nombres dénormalisés

Méthode générale

Soit x un nombre flottant simple précision normalisé positif : $x = m \cdot 2^e$, avec $m = 1.f_1 f_2 f_3 \ldots f_{23}$ et $e \in [-126, 127]$:

$$\sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{m} \times 2^{\frac{e}{2}} & \text{si } e \text{ est pair,} \\ \sqrt{2m} \times 2^{\frac{e-1}{2}} & \text{si } e \text{ est impair.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ calcul de $\sqrt{x}$ correctement arrondie au plus près :

$$\sqrt{x} = \ell \times 2^d, \text{ avec } \ell = t\sqrt{m},\ t \in \{1, \sqrt{2}\} \text{ et } d = \lfloor \tfrac{e}{2} \rfloor.$$

- avantage de cette fonction :
  - $\rightarrow$ $m \in [1, 2)$ donc $t\sqrt{m} \in [1, 2)$
  - $\rightarrow$ $\circ(\sqrt{x}) = \circ(\ell) \times 2^d$
  - $\Rightarrow$ en arrondi au plus près : pas de phase de renormalisation

Méthode générale

Soit x un nombre flottant simple précision normalisé positif : $x = m \cdot 2^e$, avec $m = 1.f_1 f_2 f_3 \ldots f_{23}$ et $e \in [-126, 127]$:

$$\sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{m} \times 2^{\frac{e}{2}} & \text{si } e \text{ est pair,} \\ \sqrt{2m} \times 2^{\frac{e-1}{2}} & \text{si } e \text{ est impair.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ calcul de $\sqrt{x}$ correctement arrondie au plus près :

$$\sqrt{x} = \ell \times 2^d, \text{ avec } \ell = t\sqrt{m},\ t \in \{1, \sqrt{2}\} \text{ et } d = \lfloor \tfrac{e}{2} \rfloor.$$

- avantage de cette fonction :
  - $\rightarrow$ $m \in [1, 2)$ donc $t\sqrt{m} \in [1, 2)$
  - $\rightarrow$ $\circ(\sqrt{x}) = \circ(\ell) \times 2^d$
  - $\Rightarrow$ en arrondi au plus près : pas de phase de renormalisation

Principales étapes

Entrée : x un nombre flottant simple précision normalisé ou une valeur spéciale, dans un registre 32 bits sous la forme signe-exposant-fraction.

1. extraction du signe s, de l'exposant e et de la mantisse m de x
   $\rightarrow$ stockage de s, e et m dans des registres 32 bits
2. traitement de valeurs spéciales

x	NaN / $x < 0$ / $-\infty$	$+\infty$	± 0
$\sqrt{x}$	NaN	$+\infty$	± 0

3. détermination de l'exposant de $\circ(\sqrt{x})$: $\lfloor \frac{e}{2} \rfloor$
4. calcul de $\ell = t\sqrt{m}$: $|\ell - \hat{\ell}| \leq 2^{-25}$
   $\rightarrow$ opérations en virgule fixe
5. arrondi au plus près de $\hat{\ell}$
6. reconstruction du résultat
   $\rightarrow$ stockage du résultat dans un registre 32 bits

Comment calculer $t\sqrt{m}$?

Méthodes directes : restaurante / non-restaurante

- 1 bit du résultat calculé à chaque itération : 24 itérations
- méthodes lentes

Méthodes itératives Newton / Goldschmidt

- première approximation de $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- en gros, la précision double à chaque itération
- méthode existante : 1 itération de Goldschmidt

Autres méthodes méthodes SRT, approximations par série entière, ...

Méthodes à base d'évaluation polynomiale

- un ou plusieurs polynômes (découpage de l'intervalle)
- évaluation des polynômes avec des schémas rapides
  $\rightarrow$ utilisant au mieux le parallélisme de la machine

Comment calculer $t\sqrt{m}$?

Méthodes directes : restaurante / non-restaurante

- 1 bit du résultat calculé à chaque itération : 24 itérations
- méthodes lentes

Méthodes itératives Newton / Goldschmidt

- première approximation de $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- en gros, la précision double à chaque itération
- méthode existante : 1 itération de Goldschmidt

Autres méthodes méthodes SRT, approximations par série entière, ...

Méthodes à base d'évaluation polynomiale

- un ou plusieurs polynômes (découpage de l'intervalle)
- évaluation des polynômes avec des schémas rapides
  $\rightarrow$ utilisant au mieux le parallélisme de la machine

Comment calculer $t\sqrt{m}$?

Méthodes directes : restaurante / non-restaurante

- 1 bit du résultat calculé à chaque itération : 24 itérations
- méthodes lentes

Méthodes itératives Newton / Goldschmidt

- première approximation de $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- en gros, la précision double à chaque itération
- méthode existante : 1 itération de Goldschmidt

Autres méthodes méthodes SRT, approximations par série entière, ...

Méthodes à base d'évaluation polynomiale

- un ou plusieurs polynômes (découpage de l'intervalle)
- évaluation des polynômes avec des schémas rapides
  $\rightarrow$ utilisant au mieux le parallélisme de la machine

Comment calculer $t\sqrt{m}$?

Méthodes directes : restaurante / non-restaurante

- 1 bit du résultat calculé à chaque itération : 24 itérations
- méthodes lentes

Méthodes itératives Newton / Goldschmidt

- première approximation de $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- en gros, la précision double à chaque itération
- méthode existante : 1 itération de Goldschmidt

Autres méthodes méthodes SRT, approximations par série entière, ...

Méthodes à base d'évaluation polynomiale

- un ou plusieurs polynômes (découpage de l'intervalle)
- évaluation des polynômes avec des schémas rapides
  $\rightarrow$ utilisant au mieux le parallélisme de la machine

Solution proposée (1/3)

Soit x un nombre flottant simple précision positif : $x = m \cdot 2^e$ avec

$$m = 1.f \quad \text{et} \quad f = 0.f_1 f_2 f_3 \ldots f_{23}$$

- approximation de $\sqrt{m} = \sqrt{1+y}$ pour $y \in [0, 1)$
- 2 polynômes de degré 6
- évaluation des polynômes par un schéma rapide de type Estrin :

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (2/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	-	-
cycle 2	$a_5 y$	$a_1 y$	-	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$r_3 = a_0 + a_1 y$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

- coût théorique de l'évaluation : 11 cycles ($24 = 4 \times 6$ pour Horner)

Solution proposée (3/3)

$$a(y) = \big((a_0 + a_1 y) - (a_2 - a_3 y)y^2\big) - \big(a_6 y^2 + (a_4 - a_5 y)\big)y^4$$

- utilisation de coefficients structurés : $a_0 = 1.0$ et $a_1 = 0.5$

	— Voie 1 —	— Voie 2 —	— Voie 3 —	— Voie 4 —
cycle 1	y^2	$a_3 y$	$a_1 y = y \gg 1$	-
cycle 2	$a_5 y$	$\cancel{a_1 y}$	$r_3 = a_0 + a_1 y$	-
cycle 3	-	-	-	-
cycle 4	$a_6 y^2$	y^4	$r_2 = a_2 - a_3 y$	-
cycle 5	$\cancel{r_3 = a_0 + a_1 y}$	$r_1 = a_4 - a_5 y$	$r_2 y^2$	-
cycle 6	-	-	-	-
cycle 7	$r_{10} = r_1 + a_6 y^2$	-	-	-
cycle 8	$r_{10} y^4$	$r_{32} = r_3 - r_2 y^2$	-	-
cycle 9	-	-	-	-
cycle 10	-	-	-	-
cycle 11	$a(y) = r_{32} - r_{10} y^4$	-	-	-

$\longrightarrow$ en pratique : gain de 1 cycle

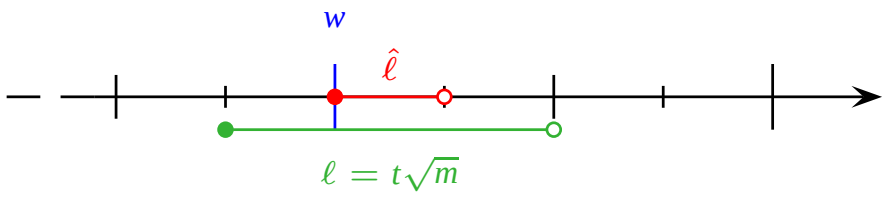
Arrondi correct au plus près

Condition suffisante pour pouvoir arrondir : $|\ell - \hat{\ell}| \leq 2^{-25}$.

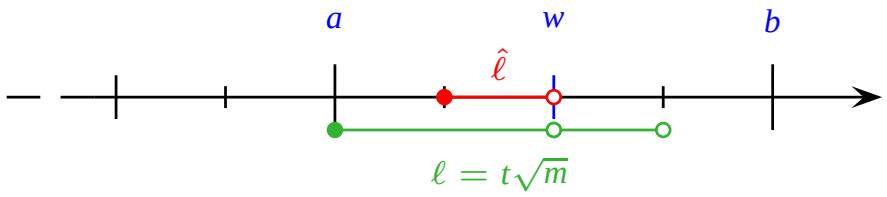
- $\sqrt{x}$ ne peut pas être le milieu de deux nombres flottants
- $w = (\hat{\ell} + 2^{-25})$ ramené au format $\mathbb{F}_{1.24} \Rightarrow w = 1.w_1 w_2 w_3 \ldots w_{24} 0000000$

$\rightarrow$ test : $w \otimes w \geq m$ (ou $w \otimes w \geq 2m$)

- w est un nombre flottant simple précision ($24^e bit = 0$)



- w est le milieu de deux nombres flottants simple précision



Performances sur ST231

Issue width	2	3	4
Restoring	170	152	147
Nonrestoring	235	181	132
Horner (degree 6)	58	49	50
Goldschmidt (1 iteration)	45	42	36
Newton (2 iterations)	53	49	45
Goldschmidt (2 iterations)	50	46	42
Polynomials of degree 5	53	45	33
Polynomials of degree 6	42	33	26

$2\times$ plus rapide que Horner

TAB.: Timings (clock cycles) for issue width values 2, 3, 4

$\Rightarrow$ accélération de plus de 45%

Discussions

- pourquoi avoir utilisé une multiplication bloquante par t, dans le calcul de $t\sqrt{m}$, et non un test sur la parité de e ?
- pourquoi ne pas avoir utilisé un seul polynôme de plus grand degré sur l'intervalle $[0, 1)$?
- pourquoi ne pas avoir utilisé de schémas rapides (Knuth & Eve, Paterson & Stockmeyer) ?

Conclusions et perspectives

- racine carrée simple précision correctement arrondie au plus près
- implantation à base d'évaluation polynomiale
- efficace sur ST231 : accélération de plus de 45%

- implanter d'autres fonctions algébriques : racine carrée inverse, ...
  - $\rightarrow$ difficulté : renormalisation nécessaire dans certains cas (racine carrée inverse)

- automatiser la conception des schémas d'évaluation
- tester ces approches sur d'autres cibles / avec d'autres modes d'arrondi