Licence de Mathématiques et Informatique
Semestre 2

Université de Perpignan Via Domitia

Algorithmique

Contrôle continu du 30 mars 2015
(1 heure)

Connaissances évaluées
– structures de contrôle de base
– tableaux 1D et premiers traitements simples
– sous-programmes et sous-programmes avec des tableaux 1D
– recherche séquentielle
– complexité en temps
– preuve de terminaison et de correction

Exercice 1. (2 points)
Écrire l'algorithme de recherche séquentielle d'un caractère c dans une chaîne de caractères s de longueur n.

Exercice 2. (8 points dont ⋆ = 3)
On représente un vecteur de taille n et à coefficients entiers sous la forme d'un tableau 1D d'entiers indicé de 0 à $n-1$. Le produit scalaire de deux vecteurs de même taille n, $x = [x(i)]_i$ et $y = [y(i)]_i$, est l'entier s :

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} x(i) \times y(i) = x(0) \times y(0) + x(1) \times y(1) + \cdots + x(n-1) \times y(n-1).$$

1. Écrire une fonction $prod$ qui calcule s pour deux vecteurs x et y de taille arbitraire.
2. La complexité en temps de ce calcul est mesurée par le nombre d'opérations arithmétiques. Quel est le paramètre de la fonction de complexité ? Quelle est cette fonction de complexité ? Préciser la complexité asymptotique de ce calcul.
3. Rappeler la définition d'un invariant de boucle et son utilité.
4. (⋆) Proposer un invariant de la boucle de calcul de s.
5. (⋆) Prouver cet invariant de boucle et conclure.

Exercice 3. (10 points dont ⋆ = 5)
On veut calculer $y = (2 \times x)^n$ pour une valeur flottante x et un entier positif n. On utilise pour cela l'expression suivante :

$$y = \underbrace{(2 \times x) \times (2 \times x) \times \cdots \times (2 \times x)}_{n \text{ fois}}. \tag{1}$$

1. Écrire un algorithme qui :
   (a) "lit au clavier" une valeur de x et de n,
   (b) calcule y en utilisant **exclusivement** l'expression (1),
   (c) "affiche à l'écran" la valeur de y.
2. (a) Écrire l'en-tête de la fonction f qui reprend le calcul de la question 1b.
   (b) Écrire un algorithme principal qui utilise f pour calculer et afficher les valeurs de $y_1 = 4^3$ et de $y_2 = 3^4$.
   (c) Écrire le corps de la fonction f.
3. Pour une valeur arbitraire de x, on souhaite calculer les valeurs :

$$(2 \times x), (2 \times x)^2, (2 \times x)^3, \ldots, (2 \times x)^{10}. \tag{2}$$

   (a) Écrire une fonction g qui utilise f pour calculer et retourner ces 10 valeurs sous la forme d'un tableau.

(b) Écrire un algorithme qui utilise g pour calculer les dix valeurs (2) pour $x = 1$ et $x = 5$. Cet algorithme affichera ces valeurs **après** que les 10 valeurs aient été calculées.

(c) ($\star$) Proposer une fonction g_opt qui minimise le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires au calcul du tableau résultat.

(d) ($\star$) Pour des valeurs arbitraires de x et de n, on souhaite maintenant calculer :

$$(2 \times x), (2 \times x)^2, (2 \times x)^3, \ldots, (2 \times x)^n \tag{3}$$

Effectuer une analyse de la complexité de ce calcul selon qu'on utilise g ou g_opt.

4. ($\star$) On reprend le calcul de g de la question 3a. En supposant que le calcul de f est correct, prouver la correction du calcul de g.