



Sujet de stage:

## **Résolution de systèmes linéaires creux par méthodes de Krylov en précision mixte modulaires et adaptatives**

**Niveau du stage:** Master 2 ou PFE ingénieur

**Durée:** 6 mois environ

**Lieu:** Laboratoire LIP6, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, Paris 5e

**Contact:** Théo Mary ([theo.mary@lip6.fr](mailto:theo.mary@lip6.fr)), Emmanuel Agullo ([emmanuel.agullo@inria.fr](mailto:emmanuel.agullo@inria.fr)), Luc Giraud ([luc.giraud@inria.fr](mailto:luc.giraud@inria.fr)), Fabienne Jézéquel ([fabienne.jezequel@lip6.fr](mailto:fabienne.jezequel@lip6.fr)), Pierre Jolivet ([pierre.jolivet@lip6.fr](mailto:pierre.jolivet@lip6.fr))

**Indemnité de stage:** sur la base des indemnités de stage CNRS (27,30 euros/jour ouvré et remboursement d'une partie des frais de transport)

### **Contexte scientifique du stage:**

La résolution de systèmes linéaires creux est l'un des problèmes fondamentaux du calcul scientifique. Les méthodes itératives fondées sur les sous-espaces de Krylov (gradient conjugué, GMRES, ...) sont capables de passer à l'échelle sur des problèmes de très grande taille, mais nécessitent cependant de coûteuses opérations d'algèbre linéaire pour assurer leur convergence rapide: préconditionnement, orthogonalisation, etc. La résolution à la fois frugale et fiable de grands systèmes linéaires creux constitue donc l'un des défis majeurs actuels du domaine.

Ce stage cherche à relever ce défi en développant des méthodes en précision mixte [1], c'est-à-dire exploitant plusieurs niveaux de précisions différents afin d'optimiser au mieux leur consommation en ressources. En effet, les architectures de calcul modernes disposent en effet de plusieurs précisions implémentées en matériel, notamment la précision double (64 bits), simple (32 bits), et demie (16 bits). Les calculs effectués en précision faible (32 voire 16 bits) sont bien plus rapides et économes en énergie. Cependant, la plupart des applications en calcul scientifique nécessitent une solution de qualité finale équivalente à 64 bits.

### **Objectifs principaux:**

L'objectif principal du stage est donc de développer des méthodes de Krylov en précision mixte qui ne réduisent la précision qu'à certains endroits bien choisis. Cet objectif sera traité à travers deux axes: la modularité et l'adaptativité.

La modularité consiste à considérer chacun des noyaux de base d'une méthode (pour Krylov: produit matrice-vecteur, préconditionnement, orthogonalisation, etc.) comme des briques indépendantes. Par exemple, certaines études ont montré l'intérêt d'effectuer le produit matrice-vecteur préconditionné dans une précision différente du reste des noyaux [2]. Le stage cherchera à développer une méthode de Krylov complètement modulaire, en particulier en dissociant le produit matrice-vecteur préconditionné en deux briques: produit avec la matrice et produit avec le préconditionneur [3, chapitre 7].

L'adaptativité consiste à adapter les précisions de chaque opération d'une méthode durant son exécution et de manière dynamique, en fonction des données fournies en entrée [1, section 14]. Cette classe d'approches a par exemple fait ses preuves pour le produit matrice-vecteur [4]. Le stage cherchera à rendre adaptatifs d'autres noyaux plus complexes comme l'orthogonalisation ou le préconditionnement, et étudiera la synergie de ce type d'approche avec les méthodes de Krylov inexacts [5] qui réduisent la précision globale au cours des itérations.

Chacun des deux axes implique à la fois une composante mathématique, dont le but est d'effectuer des analyses d'erreur théoriques pour déterminer rigoureusement les endroits où la précision peut être réduite sans impacter la qualité finale de la solution, et une composante informatique, dont le but est de développer des implémentations efficaces de ces nouvelles méthodes pour exploiter les architectures modernes de calcul parallèle.

### **Environnement de travail:**

Le stage aura lieu dans l'équipe PEQUAN du Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6) de Sorbonne Université (Paris), et s'effectuera en étroite collaboration avec l'équipe CONCACE du centre Inria Bordeaux. Au moins un séjour de courte durée est à prévoir à Bordeaux durant la période du stage.

### **Continuation en thèse:**

La continuation en thèse du stage est envisagée, dans le cadre du projet national NUMPEX piloté par le CNRS, le CEA et Inria et qui a pour objectif de concevoir et développer des briques logicielles qui équiperont les futures machines exascales pour des applications au climat, la transition énergétique, la santé, l'IA et l'industrie.

### **Références pour aller plus loin:**

- [1] N. Higham, T. Mary. Mixed precision algorithms in numerical linear algebra, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03537373>
- [2] P. Amestoy, A. Buttari, N. Higham, J.-Y. L'Excellent, T. Mary, B. Vieublé. Five-precision GMRES-based Iterative Refinement, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03190686>
- [3] B. Vieublé. Mixed precision iterative refinement for the solution of large sparse linear systems, <https://filedn.eu/lyDamYXd3jSjd2K2sKty8BJ/thesis.pdf>
- [4] S. Graillat, F. Jézéquel, T. Mary, R. Molina. Adaptive precision sparse matrix-vector product and its application to Krylov solvers, <https://hal.science/hal-03561193>
- [5] L. Giraud, S. Gratton and J. Langou. Convergence in backward error of relaxed GMRES, <https://doi.org/10.1137/040608416>