



Sujet de stage:

## **Résolution de grands systèmes linéaires creux par méthodes de décomposition en domaines en précision mixte**

**Niveau du stage:** Master 2 ou PFE ingénieur

**Durée:** 6 mois environ

**Lieu:** Laboratoires LIP6 et LJLL, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, Paris 5e

**Contact:** Pierre Jolivet ([pierre.jolivet@lip6.fr](mailto:pierre.jolivet@lip6.fr)), Théo Mary ([theo.mary@lip6.fr](mailto:theo.mary@lip6.fr)), Frédéric Nataf ([nataf@ann.jussieu.fr](mailto:nataf@ann.jussieu.fr)), Pierre-Henri Tournier ([pierre-henri.tournier@sorbonne-universite.fr](mailto:pierre-henri.tournier@sorbonne-universite.fr))

**Indemnité de stage:** sur la base des indemnités de stage CNRS (27,30 euros/jour ouvré et remboursement d'une partie des frais de transport)

### **Contexte scientifique du stage:**

La résolution de systèmes linéaires creux est l'un des problèmes fondamentaux du calcul scientifique. Malgré la puissance de calcul des supercalculateurs modernes, résoudre des systèmes de très grande taille (de l'ordre d'un milliard d'inconnues) reste hors de portée des méthodes classiques. Les méthodes de décomposition en domaines (DD) permettent de traiter de telles grandes tailles en divisant le problème global en problèmes locaux plus petits qui sont chacun résolus indépendamment et en parallèle. Une phase globale assure la continuité de la solution. Cependant, les méthodes de DD nécessitent divers noyaux d'algèbre linéaire (préconditionneurs locaux, problèmes de valeurs propres) qui sont précis pour assurer une convergence rapide, mais qui restent peu coûteux à construire, pour maintenir la capacité à passer à l'échelle sur de très grands problèmes. La résolution à la fois frugale et fiable de grands systèmes linéaires creux constitue donc l'un des défis majeurs actuels du domaine.

### **Objectifs principaux:**

L'objectif de ce stage est de développer des méthodes de DD en précision mixte, c'est-à-dire exploitant différents niveaux de précisions afin d'optimiser au mieux leur consommation en ressources. Les architectures de calcul modernes (CPUs et GPUs) disposent en effet de plusieurs précisions implémentées en matériel, notamment la précision double (64 bits), simple (32 bits), et demie (16 bits). Les calculs effectués en précision faible (32 voire 16 bits) sont bien plus rapides et économes en place mémoire et en énergie. Cependant, la plupart des applications en calcul scientifique, et notamment celles visées par ce stage, nécessitent une solution de qualité finale équivalente à 64 bits. L'objectif est donc de développer des méthodes en précision mixte qui ne réduisent la précision qu'à certains endroits bien choisis. Cet objectif se décline en trois axes. Le premier est de déterminer du point de vue mathématique, à travers une analyse d'erreur théorique, les endroits où la précision peut être réduite sans impacter la qualité finale de la solution. Le deuxième axe consiste en la mise en

oeuvre expérimentale de ces stratégies dans le logiciel HPDDM [3] pour exploiter les architectures modernes de calcul parallèle. Enfin, le troisième axe se concentre sur l'évaluation du potentiel de ces méthodes pour diverses applications physiques réalistes modélisées avec des scripts FreeFEM: élasticité, mécanique des fluides, écoulements poreux, .... Ce stage demandera donc une attention particulière à la fois aux aspects informatiques (implémentation efficace des méthodes) mais aussi mathématiques (contrôle rigoureux de l'erreur introduite, garanties théoriques de robustesse).

**Environnement de travail:**

Le stage aura lieu au Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6) et en collaboration avec le Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL), tous deux situés sur le campus Jussieu de Sorbonne Université.

**Continuation en thèse:**

La continuation en thèse du stage est envisagée, dans le cadre du projet national NUMPEX piloté par le CNRS, le CEA et Inria et qui a pour objectif de concevoir et développer des briques logicielles qui équiperont les futures machines exascales pour des applications au climat, la transition énergétique, la santé, l'IA et l'industrie.

**Références pour aller plus loin:**

- [1] V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf. (2015). *An introduction to domain decomposition methods: algorithms, theory, and parallel implementation*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [2] N. Higham, T. Mary. *Mixed precision algorithms in numerical linear algebra*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03537373>
- [3] P. Jolivet, F. Hecht, F. Nataf, C. Prud'Homme. (2013). *Scalable domain decomposition preconditioners for heterogeneous elliptic problems*. In Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis.