Modélisation Mathématique et Numérique de Structures en présence de Couplages Linéaires Multiphysiques

Francesco Bonaldi

Encadrants :

Françoise Krasucki
Directrice, IMAG

Marina Vidrascu
Co-directrice, INRIA de Paris

6 juillet 2016

Plan

- **Objectifs et Motivation**
- **Modélisation Mathématique**
- **Simulation Numérique**
- **Développements et Perspectives**
- **Conclusions**

Objectifs et Motivation

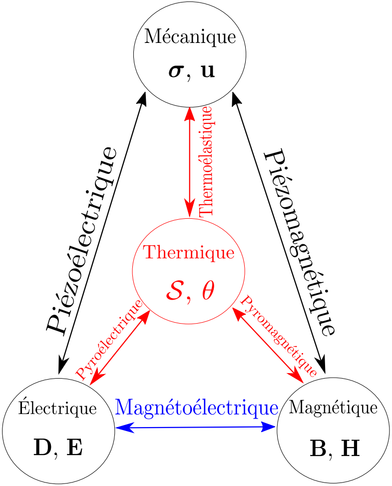
- **Objectifs :** enrichir le modèle classique des *structures intelligentes* (capteurs et/ou actionneurs) en tenant compte des effets thermiques, et en présenter une étude **mathématique et numérique**.

Objectifs et Motivation

- **Objectifs :** enrichir le modèle classique des *structures intelligentes* (capteurs et/ou actionneurs) en tenant compte des effets thermiques, et en présenter une étude **mathématique et numérique**.
- **Motivation :** les effets de la température peuvent être importants pour améliorer les performances de récolte d'énergie. Applications : microélectronique, dispositifs de mémoire, structures aéronautiques.

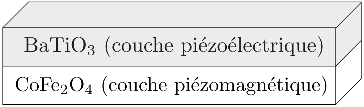
Objectifs et Motivation

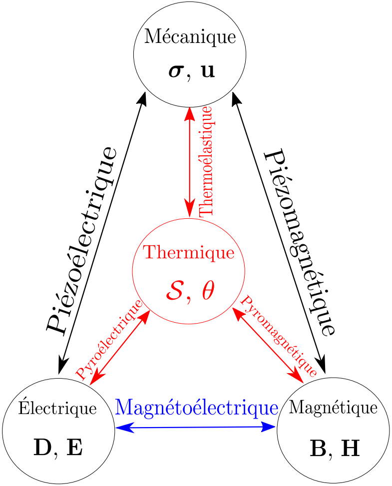
- **Objectifs :** enrichir le modèle classique des *structures intelligentes* (capteurs et/ou actionneurs) en tenant compte des effets thermiques, et en présenter une étude **mathématique et numérique**.
- **Motivation :** les effets de la température peuvent être importants pour améliorer les performances de récolte d'énergie. Applications : microélectronique, dispositifs de mémoire, structures aéronautiques.



Objectifs et Motivation

- **Objectifs :** enrichir le modèle classique des *structures intelligentes* (capteurs et/ou actionneurs) en tenant compte des effets thermiques, et en présenter une étude **mathématique et numérique**.
- **Motivation :** les effets de la température peuvent être importants pour améliorer les performances de récolte d'énergie. Applications : microélectronique, dispositifs de mémoire, structures aéronautiques.
- **Exemple classique :** composite bi-phase **$BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$**, présentant des couplages de nature magnéto-électro-thermo-élastique (**METE**).





- Objectifs et Motivation
- **Modélisation Mathématique**
- Simulation Numérique
- Développements et Perspectives
- Conclusions

Problème Général

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert connexe avec frontière Lipschitz-continue, $\widetilde{\mathcal{U}} \coloneqq (\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \theta)$.

Système d'Équations

$$\begin{cases} \rho\ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \mathbf{f} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \rho_e & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\widetilde{\mathcal{U}}) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathbf{D}}(\widetilde{\mathcal{U}}) - \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = -\mathbf{J} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathbf{B}}(\widetilde{\mathcal{U}}) + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathcal{S}}(\widetilde{\mathcal{U}}) + \frac{1}{T_0}\operatorname{div}\mathbf{q}(\theta) = r & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases}$$

Problème Général

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert connexe avec frontière Lipschitz-continue, $\widetilde{\mathcal{U}} \coloneqq (\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \theta)$.

Système d'Équations

$$\begin{cases} \rho\ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \mathbf{f} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \rho_e & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\widetilde{\mathcal{U}}) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathbf{D}}(\widetilde{\mathcal{U}}) - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = -\mathbf{J} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathbf{B}}(\widetilde{\mathcal{U}}) + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \mathbf{0} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathcal{S}}(\widetilde{\mathcal{U}}) + \frac{1}{T_0}\operatorname{div}\mathbf{q}(\theta) = r & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases}$$

Lois de Comportement

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\widetilde{\mathcal{U}}) &= \mathbf{Ce}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}^T\mathbf{E} - \mathbf{R}^T\mathbf{H} - \boldsymbol{\beta}\theta, \\ \mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{U}}) &= \mathbf{Pe}(\mathbf{u}) + \mathbf{XE} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{H} + \mathbf{p}\theta, \\ \mathbf{B}(\widetilde{\mathcal{U}}) &= \mathbf{Re}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{E} + \mathbf{MH} + \mathbf{m}\theta, \\ \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{U}}) &= \boldsymbol{\beta} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{m}\cdot\mathbf{H} + c_v\theta, \\ \mathbf{q}(\theta) &= -\mathbf{K}\boldsymbol{\nabla}\theta. \end{aligned}$$

Problème Général

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert connexe avec frontière Lipschitz-continue, $\widetilde{\mathcal{U}} \coloneqq (\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \theta)$.

Système d'Équations

$$
\begin{cases}
\rho\ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \mathbf{f} & x \in \Omega,\ t > 0,\\
\operatorname{div}\mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \rho_e & x \in \Omega,\ t > 0,\\
\operatorname{div}\mathbf{B}(\widetilde{\mathcal{U}}) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0,\\
\dot{\mathbf{D}}(\widetilde{\mathcal{U}}) - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = -\mathbf{J} & x \in \Omega,\ t > 0,\\
\dot{\mathbf{B}}(\widetilde{\mathcal{U}}) + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \mathbf{0} & x \in \Omega,\ t > 0,\\
\dot{\mathcal{S}}(\widetilde{\mathcal{U}}) + \frac{1}{T_0}\operatorname{div}\mathbf{q}(\theta) = r & x \in \Omega,\ t > 0.
\end{cases}
$$

Lois de Comportement

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \mathbf{Ce}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}^T\mathbf{E} - \mathbf{R}^T\mathbf{H} - \boldsymbol{\beta}\theta,\\
&\mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \mathbf{Pe}(\mathbf{u}) + \mathbf{XE} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{H} + \mathbf{p}\theta,\\
&\mathbf{B}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \mathbf{Re}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{E} + \mathbf{MH} + \mathbf{m}\theta,\\
&\mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \boldsymbol{\beta} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{p}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{m}\cdot\mathbf{H} + c_v\theta,\\
&\mathbf{q}(\theta) = -\mathbf{K}\boldsymbol{\nabla}\theta.
\end{aligned}
$$

Conditions aux Limites

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{\mathcal{U}})\mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{mN}, & \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{mD},\\
\mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{U}})\cdot\mathbf{n} = d & \text{sur } \Gamma_{eN}, & \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{eD},\\
\mathbf{B}(\widetilde{\mathcal{U}})\cdot\mathbf{n} = b & \text{sur } \Gamma_{gN}, & \mathbf{H}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{gD},\\
-\mathbf{q}(\theta)\cdot\mathbf{n} = \varrho & \text{sur } \Gamma_{tN}, & \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_{tD}.
\end{cases}
$$

Conditions Initiales

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0,\\
\dot{\mathbf{u}}(\cdot,0) = \mathbf{u}_1,\\
\mathbf{E}(\cdot,0) = \mathbf{E}_0,\\
\mathbf{H}(\cdot,0) = \mathbf{H}_0,\\
\theta(\cdot,0) = \theta_0.
\end{cases}
$$

Table 1. Paramètres des lois de comportement pour un composite magnéto-électro-thermo-élastique $BaTiO_3$–$CoFe_2O_4$ avec fraction volumique 0.6 de $BaTiO_3$.

Modules Élastiques		**Perméabilités Magnétiques**	
$C_{1111} = C_{2222}$ (GPa)	200	$M_{11} = M_{22}$ (10^{-4} $\mathrm{N\,s^2/C^2}$)	1.5
C_{1122} (GPa)	110	M_{33} (10^{-4} $\mathrm{N\,s^2/C^2}$)	0.75
$C_{1133} = C_{2233}$ (GPa)	110	**Coefficients Piézomagnétiques**	
C_{3333} (GPa)	190	$R_{311} = R_{322}$ (N/A m)	200
$C_{2323} = C_{3131}$ (GPa)	45	R_{333} (N/A m)	260
C_{1212} (GPa)	45	R_{113} (N/A m)	180
Coefficients Piézoélectriques		**Coefficients Magnétoélectriques**	
$P_{311} = P_{322}$ ($\mathrm{C/m^2}$)	-3.5	$\alpha_{11} = \alpha_{22}$ (10^{-12} N s/V C)	6
P_{333} ($\mathrm{C/m^2}$)	11	α_{33} (10^{-12} N s/V C)	2500
Permittivités Diélectriques		**Coefficient Pyroélectrique**	
$X_{11} = X_{22}$ (10^{-9} $\mathrm{C^2/N\,m^2}$)	0.9	p_3 (10^{-5} $\mathrm{C/m^2\,K}$)	-12.4
X_{33} (10^{-9} $\mathrm{C^2/N\,m^2}$)	7.5	**Coefficient Pyromagnétique**	
Contraintes Thermiques		m_3 (10^{-3} N/A m K)	5.92
$\beta_{11} = \beta_{22}$ (10^6 $\mathrm{N/K\,m^2}$)	4.86	**Capacité Thermique**	
β_{33} (10^6 $\mathrm{N/K\,m^2}$)	4.32	c_v ($\mathrm{J/m^3\,K^2}$)	325
		Conductivité Thermique	
		K_{33} (W/m K)	2.85

Existence et Unicité

Théorème

Sous des hypothèses opportunes de régularité sur les termes de source et sur les données initiales et aux limites, ainsi que des conditions de compatibilité sur les données initiales et aux limites, le problème admet une solution unique $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \theta)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in C^2([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega)), \\ \mathbf{E} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{eD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \mathbf{H} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{gD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \theta \in C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{tD}(\Omega)). \end{cases}$$

Existence et Unicité

Théorème

Sous des hypothèses opportunes de régularité sur les termes de source et sur les données initiales et aux limites, ainsi que des conditions de compatibilité sur les données initiales et aux limites, le problème admet une solution unique $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \theta)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in C^2([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega)), \\ \mathbf{E} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{eD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \mathbf{H} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{gD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \theta \in C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{tD}(\Omega)). \end{cases}$$

- Raoult & Sène (2003) : problème analogue sans effets thermiques et sans couplages piézomagnétique et magnétoélectrique.
- Imperiale & Joly (2012) : preuve d'existence et unicité dans le cas **piézoélectrique**, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ définis dans $\mathbb{R}^3$, basée sur le **Théorème de Hille-Yosida**.

Existence et Unicité

Théorème

Sous des hypothèses opportunes de régularité sur les termes de source et sur les données initiales et aux limites, ainsi que des conditions de compatibilité sur les données initiales et aux limites, le problème admet une solution unique $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \theta)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in C^2([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega)), \\ \mathbf{E} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{eD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \mathbf{H} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{gD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \theta \in C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{tD}(\Omega)). \end{cases}$$

- Raoult & Sène (2003) : problème analogue sans effets thermiques et sans couplages piézomagnétique et magnétoélectrique.
- Imperiale & Joly (2012) : preuve d'existence et unicité dans le cas **piézoélectrique**, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ définis dans $\mathbb{R}^3$, basée sur le **Théorème de Hille-Yosida**.

Difficultés :

- Couplages thermique et magnétoélectrique $\Rightarrow$ Équation de la forme

$$\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}U = F, \quad \mathcal{M} \text{ défini positif et non diagonal.}$$

Existence et Unicité

Théorème

Sous des hypothèses opportunes de régularité sur les termes de source et sur les données initiales et aux limites, ainsi que des conditions de compatibilité sur les données initiales et aux limites, le problème admet une solution unique $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \theta)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in C^2([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega)), \\ \mathbf{E} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{eD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \mathbf{H} \in C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; \mathbf{H}_{gD}(\mathrm{curl}, \Omega)), \\ \theta \in C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{tD}(\Omega)). \end{cases}$$

- Raoult & Sène (2003) : problème analogue sans effets thermiques et sans couplages piézomagnétique et magnétoélectrique.
- Imperiale & Joly (2012) : preuve d'existence et unicité dans le cas **piézoélectrique**, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ définis dans $\mathbb{R}^3$, basée sur le **Théorème de Hille-Yosida**.

Difficultés :

- Couplages thermique et magnétoélectrique $\Rightarrow$ Équation de la forme

$$\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}U = F, \quad \mathcal{M} \text{ défini positif et non diagonal.}$$

- Introduire des fonctions de relèvement pour les données aux limites.

Adimensionnalisation

- $V_+ =$ vitesse de l'onde élastique la plus rapide se propageant dans le milieu $\simeq 5980$ m/s.
- $c_0 =$ vitesse de la lumière.

Adimensionnalisation

- $V_+ =$ vitesse de l'onde élastique la plus rapide se propageant dans le milieu $\simeq 5980$ m/s.
- $c_0 =$ vitesse de la lumière.

On introduit $\delta := V_+/c_0 \simeq 10^{-5}$.

Adimensionnalisation

- $V_+ =$ vitesse de l'onde élastique la plus rapide se propageant dans le milieu $\simeq 5980$ m/s.
- $c_0 =$ vitesse de la lumière.

On introduit $\delta \coloneqq V_+/c_0 \simeq 10^{-5}$.

- L'**adimensionnalisation** du système d'équations donne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_r &= -\delta \left(\mathbf{M}_r \dot{\mathbf{H}}_r + \kappa \, \mathbf{R}_r^T \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_r) + \alpha_+ c_0 \, \boldsymbol{\alpha}_r \dot{\mathbf{E}}_r + \upsilon \, \mathbf{m}_r \dot{\theta}_r \right), \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}_r &= \delta \left(\mathbf{X}_r \dot{\mathbf{E}}_r + \chi \, \mathbf{P}_r^T \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_r) + \alpha_+ c_0 \, \boldsymbol{\alpha}_r \dot{\mathbf{H}}_r + \varsigma \, \mathbf{p}_r \dot{\theta}_r + \mathbf{J}_r \right),
\end{aligned}$$

Adimensionnalisation

- V_+ = vitesse de l'onde élastique la plus rapide se propageant dans le milieu $\simeq 5980$ m/s.
- c_0 = vitesse de la lumière.

On introduit $\delta \coloneqq V_+/c_0 \simeq 10^{-5}$.

- L'**adimensionnalisation** du système d'équations donne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_r &= -\delta \left(\mathbf{M}_r \dot{\mathbf{H}}_r + \kappa\, \mathbf{R}_r^T \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_r) + \alpha_+ c_0\, \boldsymbol{\alpha}_r \dot{\mathbf{E}}_r + \upsilon\, \mathbf{m}_r \dot{\theta}_r \right), \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}_r &= \delta \left(\mathbf{X}_r \dot{\mathbf{E}}_r + \chi\, \mathbf{P}_r^T \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_r) + \alpha_+ c_0\, \boldsymbol{\alpha}_r \dot{\mathbf{H}}_r + \varsigma\, \mathbf{p}_r \dot{\theta}_r + \mathbf{J}_r \right),
\end{aligned}$$

- Lorsque $\delta \to 0$, si les seconds membres sont bornés on retrouve de façon formelle

Hypothèse Quasi-Statique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_r = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}_r = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_r = -\boldsymbol{\nabla} \varphi_r, \\ \mathbf{H}_r = -\boldsymbol{\nabla} \zeta_r \end{cases}$$

Adimensionnalisation

- V_+ = vitesse de l'onde élastique la plus rapide se propageant dans le milieu $\simeq 5980$ m/s.
- c_0 = vitesse de la lumière.

On introduit $\delta \coloneqq V_+/c_0 \simeq 10^{-5}$.

- L'**adimensionnalisation** du système d'équations donne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_r &= -\delta \left(\mathbf{M}_r \dot{\mathbf{H}}_r + \kappa \, \mathbf{R}_r^T \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_r) + \alpha_+ c_0 \, \boldsymbol{\alpha}_r \dot{\mathbf{E}}_r + \upsilon \, \mathbf{m}_r \dot{\theta}_r \right), \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}_r &= \delta \left(\mathbf{X}_r \dot{\mathbf{E}}_r + \chi \, \mathbf{P}_r^T \mathbf{e}(\dot{\mathbf{u}}_r) + \alpha_+ c_0 \, \boldsymbol{\alpha}_r \dot{\mathbf{H}}_r + \varsigma \, \mathbf{p}_r \dot{\theta}_r + \mathbf{J}_r \right),
\end{aligned}$$

- Lorsque $\delta \to 0$, si les seconds membres sont bornés on retrouve de façon formelle

Hypothèse Quasi-Statique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_r = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}_r = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_r = -\boldsymbol{\nabla} \varphi_r, \\ \mathbf{H}_r = -\boldsymbol{\nabla} \zeta_r \end{cases}$$

- Imperiale & Joly (2012) : preuve rigoureuse de la convergence vers le modèle quasi-statique pour un milieu **piézoélectrique**.

Problème Quasi-Statique

- Nouveau quadruplet $\mathcal{U} \coloneqq (\mathbf{u}, \varphi, \zeta, \theta)$.

Système d'Équations Quasi-Statique

$$\begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{U}) = \mathbf{f} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathcal{U}) = \rho_e & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathcal{U}) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathcal{S}}(\mathcal{U}) + \frac{1}{T_0} \operatorname{div} \mathbf{q}(\theta) = r & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases}$$

Lois de Comportement

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{U}) &= \mathbf{Ce}(\mathbf{u}) + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\nabla} \varphi + \mathbf{R}^T \boldsymbol{\nabla} \zeta - \boldsymbol{\beta} \theta, \\ \mathbf{D}(\mathcal{U}) &= \mathbf{Pe}(\mathbf{u}) - \mathbf{X} \boldsymbol{\nabla} \varphi - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\nabla} \zeta + \mathbf{p} \theta, \\ \mathbf{B}(\mathcal{U}) &= \mathbf{Re}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\nabla} \varphi - \mathbf{M} \boldsymbol{\nabla} \zeta + \mathbf{m} \theta, \\ \mathcal{S}(\mathcal{U}) &= \boldsymbol{\beta} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla} \zeta + c_v \theta, \\ \mathbf{q}(\theta) &= -\mathbf{K} \boldsymbol{\nabla} \theta. \end{aligned}$$

Conditions aux Limites

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{U}) \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{mN}, & \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{mD}, \\ \mathbf{D}(\mathcal{U}) \cdot \mathbf{n} = d & \text{sur } \Gamma_{eN}, & \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_{eD}, \\ \mathbf{B}(\mathcal{U}) \cdot \mathbf{n} = b & \text{sur } \Gamma_{gN}, & \zeta = 0 & \text{sur } \Gamma_{gD}, \\ -\mathbf{q}(\theta) \cdot \mathbf{n} = \varrho & \text{sur } \Gamma_{tN}, & \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_{tD}. \end{cases}$$

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \\ \dot{\mathbf{u}}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_1, \\ \theta(\cdot, 0) = \theta_0. \end{cases}$$

Problème Quasi-Statique

- Nouveau quadruplet $\mathcal{U} \coloneqq (\mathbf{u}, \varphi, \zeta, \theta)$.

Système d'Équations Quasi-Statique

$$\begin{cases} \rho\ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{U}) = \mathbf{f} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{D}(\mathcal{U}) = \rho_e & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathcal{U}) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dot{\mathcal{S}}(\mathcal{U}) + \frac{1}{T_0}\operatorname{div}\mathbf{q}(\theta) = r & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases}$$

Lois de Comportement

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{U}) &= \mathbf{Ce}(\mathbf{u}) + \mathbf{P}^T\boldsymbol{\nabla}\varphi + \mathbf{R}^T\boldsymbol{\nabla}\zeta - \boldsymbol{\beta}\theta, \\ \mathbf{D}(\mathcal{U}) &= \mathbf{Pe}(\mathbf{u}) - \mathbf{X}\boldsymbol{\nabla}\varphi - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}\zeta + \mathbf{p}\theta, \\ \mathbf{B}(\mathcal{U}) &= \mathbf{Re}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}\varphi - \mathbf{M}\boldsymbol{\nabla}\zeta + \mathbf{m}\theta, \\ \mathcal{S}(\mathcal{U}) &= \boldsymbol{\beta} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi - \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta + c_v\theta, \\ \mathbf{q}(\theta) &= -\mathbf{K}\boldsymbol{\nabla}\theta. \end{aligned}$$

Conditions aux Limites

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{U})\mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{mN}, & \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{mD}, \\ \mathbf{D}(\mathcal{U})\cdot\mathbf{n} = d & \text{sur } \Gamma_{eN}, & \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_{eD}, \\ \mathbf{B}(\mathcal{U})\cdot\mathbf{n} = b & \text{sur } \Gamma_{gN}, & \zeta = 0 & \text{sur } \Gamma_{gD}, \\ -\mathbf{q}(\theta)\cdot\mathbf{n} = \varrho & \text{sur } \Gamma_{tN}, & \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_{tD}. \end{cases}$$

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0, \\ \dot{\mathbf{u}}(\cdot,0) = \mathbf{u}_1, \\ \theta(\cdot,0) = \theta_0. \end{cases}$$

- Miara & Suárez (2013) : problème analogue pour un milieu **thermo-piézoélectrique**.

Existence et Unicité

Théorème

Sous des hypothèses de régularité usuelles sur les termes de sources et les données aux limites, et en supposant que

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega),\\&\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega),\\&\theta_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_{tD}(\Omega),\end{aligned}$$

on obtient une solution unique $(\mathbf{u}, \varphi, \zeta, \theta)$ telle que

$$\begin{cases}\mathbf{u} \in C^0([0,T];\mathbf{H}^1_{mD}(\Omega)) \cap C^1([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)),\\ \varphi \in H^1(0,T;H^1_{eD}(\Omega)) \cap C^0([0,T];H^1_{eD}(\Omega)),\\ \zeta \in H^1(0,T;H^1_{gD}(\Omega)) \cap C^0([0,T];H^1_{gD}(\Omega)),\\ \theta \in H^1(0,T;H^1_{tD}(\Omega)) \cap C^0([0,T];H^1_{tD}(\Omega)).\end{cases}$$

Existence et Unicité

Théorème

Sous des hypothèses de régularité usuelles sur les termes de sources et les données aux limites, et en supposant que

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega),$$
$$\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega),$$
$$\theta_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_{tD}(\Omega),$$

on obtient une solution unique $(\mathbf{u}, \varphi, \zeta, \theta)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in C^0([0,T]; \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega)) \cap C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \varphi \in H^1(0,T; H^1_{eD}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{eD}(\Omega)), \\ \zeta \in H^1(0,T; H^1_{gD}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{gD}(\Omega)), \\ \theta \in H^1(0,T; H^1_{tD}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{tD}(\Omega)). \end{cases}$$

- Preuve basée sur la méthode de **Faedo-Galerkin**.

Existence et Unicité

Théorème

Sous des hypothèses de régularité usuelles sur les termes de sources et les données aux limites, et en supposant que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega),\\
&\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega),\\
&\theta_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_{tD}(\Omega),
\end{aligned}$$

on obtient une solution unique $(\mathbf{u}, \varphi, \zeta, \theta)$ telle que

$$\begin{cases}
\mathbf{u} \in C^0([0,T]; \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega)) \cap C^1([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)),\\
\varphi \in H^1(0,T; H^1_{eD}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{eD}(\Omega)),\\
\zeta \in H^1(0,T; H^1_{gD}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{gD}(\Omega)),\\
\theta \in H^1(0,T; H^1_{tD}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H^1_{tD}(\Omega)).
\end{cases}$$

- Preuve basée sur la méthode de **Faedo-Galerkin**.
- Avec le choix

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \theta_0) \in \mathbf{H}^1_{mD}(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times H^1_{tD}(\Omega)$$

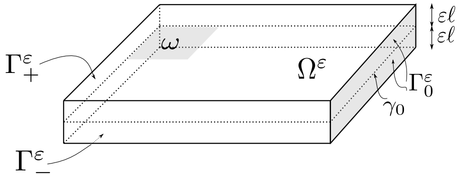
  on obtient une solution moins régulière en temps.

Plaques

On identifie Ω avec une région en forme de plaque Ω^{ε}, d'épaisseur $2\varepsilon\ell$.

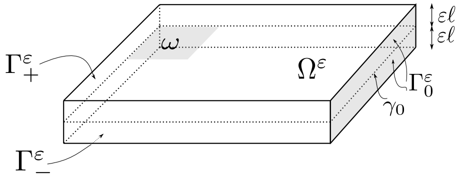
Plaques

On identifie Ω avec une région en forme de plaque Ω^{ε}, d'épaisseur $2\varepsilon\ell$.



Plaques

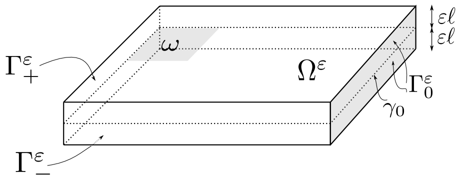
On identifie Ω avec une région en forme de plaque Ω^ε, d'épaisseur $2\varepsilon\ell$.



Soit $\mathcal{U}^\varepsilon \coloneqq (\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, \zeta^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$.

Plaques

On identifie Ω avec une région en forme de plaque Ω^ε, d'épaisseur $2\varepsilon\ell$.



Soit $\mathcal{U}^\varepsilon \coloneqq (\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, \zeta^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$.

Système d'Équations Quasi-Statique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}^\varepsilon \ddot{\mathbf{u}}^\varepsilon - \mathrm{div}^\varepsilon \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon) = \mathbf{f}^\varepsilon & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon,\, t > 0, \\ \mathrm{div}^\varepsilon \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon) = \rho_e^\varepsilon & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon,\, t > 0, \\ \mathrm{div}^\varepsilon \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon) = 0 & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon,\, t > 0, \\ \dot{\mathcal{S}}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon) + \frac{1}{T_0}\mathrm{div}^\varepsilon \mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon) = r^\varepsilon & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon,\, t > 0, \end{cases}$$

- Loi de comportement

$$(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon), \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon), \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon), \mathcal{S}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)) = \mathcal{L}^\varepsilon \mathcal{U}^\varepsilon.$$

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon), \ x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon), \ x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon), \ \ x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases}\mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0)=\mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon),\ x^\varepsilon\in\Omega^\varepsilon,\\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0)=\mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon),\ x^\varepsilon\in\Omega^\varepsilon,\\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0)=\theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon),\ \ x^\varepsilon\in\Omega^\varepsilon.\end{cases}$$

Conditions aux Limites Thermomécaniques

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbf{n}^\varepsilon=\mathbf{g}^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon=\mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon,\\ -\mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon=\varrho^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon=0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon.\end{cases}$$

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon), \ x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon), \ x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon), \ \ x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Thermomécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ -\mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = \varrho^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Électromagnétiques

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Thermomécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ -\mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = \varrho^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Électromagnétiques

Capteur Électrique - Actionneur Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = d^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon, \quad \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Thermomécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ -\mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = \varrho^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \theta^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Électromagnétiques

Capteur Électrique - Actionneur Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = d^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Capteur Magnétique - Actionneur Électrique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = \varphi^{\pm,\varepsilon} & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = b^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Thermomécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ -\mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = \varrho^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Électromagnétiques

Capteur Électrique - Actionneur Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = d^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon, \quad \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Actionneur Électrique et Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon, \quad \varphi^\varepsilon = \varphi^{\pm,\varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon, \quad \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Capteur Magnétique - Actionneur Électrique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon, \quad \varphi^\varepsilon = \varphi^{\pm,\varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = b^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \zeta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Thermomécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ -\mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = \varrho^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Électromagnétiques

Capteur Électrique - Actionneur Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = d^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Actionneur Électrique et Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = \varphi^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Capteur Magnétique - Actionneur Électrique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = \varphi^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = b^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Capteur Électrique et Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = d^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = b^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions Initiales et aux Limites

Conditions Initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \mathbf{u}_1^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \\ \theta^\varepsilon(x^\varepsilon,0) = \theta_0^\varepsilon(x^\varepsilon), & x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Thermomécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{g}^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ -\mathbf{q}^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = \varrho^\varepsilon & \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Conditions aux Limites Électromagnétiques

Capteur Électrique - Actionneur Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = d^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Actionneur Électrique et Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = \varphi^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = \zeta^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases}$$

Capteur Magnétique - Actionneur Électrique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = \varphi^{\pm,\varepsilon} \ \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = b^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Capteur Électrique et Magnétique

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = d^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \varphi^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \mathbf{B}^\varepsilon(\mathcal{U}^\varepsilon)\cdot\mathbf{n}^\varepsilon = b^\varepsilon \ \text{sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon, & \zeta^\varepsilon = 0 \ \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

- Licht & Weller (2010) ont considéré ces conditions aux limites dans le cas piézo-magnéto-électrique en **statique**.

Analyse Asymptotique I

Mises à l'Échelle

- Coefficients des lois de comportement **indépendants** de ε.
- Tenseur de masse :

$$\rho_{\alpha}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) = \rho(x), \quad \rho_{3}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^{2}\rho(x), \quad \forall x^{\varepsilon} = \pi^{\varepsilon}x \in \overline{\Omega}^{\varepsilon}.$$

Analyse Asymptotique I

Mises à l'Échelle

- Coefficients des lois de comportement **indépendants** de ε.
- Tenseur de masse :

$$\rho_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \rho(x), \quad \rho_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 \rho(x), \quad \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \overline{\Omega}^\varepsilon.$$

- Déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon$ et variation de temperature θ^ε :

$$u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = u_\alpha(\varepsilon)(x,t), \; u_3^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^{-1} u_3(\varepsilon)(x,t),$$
$$\theta^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \theta(\varepsilon)(x,t), \quad \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \overline{\Omega}^\varepsilon, \; t > 0.$$

Analyse Asymptotique I

Mises à l'Échelle

- Coefficients des lois de comportement **indépendants** de ε.
- Tenseur de masse :

$$\rho_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \rho(x), \quad \rho_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 \rho(x), \quad \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \overline{\Omega}^\varepsilon.$$

- Déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon$ et variation de temperature θ^ε :

$$u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = u_\alpha(\varepsilon)(x,t), \; u_3^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^{-1} u_3(\varepsilon)(x,t),$$
$$\theta^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \theta(\varepsilon)(x,t), \quad \forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \overline{\Omega}^\varepsilon, \; t > 0.$$

- Potentiels φ^ε et ζ^ε :

$$\varphi^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^p \varphi(\varepsilon)(x,t), \quad \zeta^\varepsilon(x^\varepsilon, t) = \varepsilon^q \zeta(\varepsilon)(x,t), \quad p, q \in \{0, 1\}.$$

	$p = 0$	$p = 1$
$q = 0$	**Capteur Électrique et Magnétique**	**Actionneur Électrique - Capteur Magnétique**
$q = 1$	**Capteur Électrique - Actionneur Magnétique**	**Actionneur Électrique et Magnétique**

Analyse Asymptotique II

Théorème

Dans des espaces de la forme $L^2(0,T;X)$, on a les convergences faibles suivantes :

- $\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}^0 \equiv (\tilde{\mathbf{u}}^0, u_3^0)$, avec

$$\widetilde{\mathbf{u}}^0(\tilde{x}, x_3) = \mathbf{u}_H(\tilde{x}) - x_3 \boldsymbol{\nabla} w(\tilde{x}) \quad \text{et} \quad u_3^0(\tilde{x}, x_3) = w(\tilde{x});$$

Analyse Asymptotique II

Théorème

Dans des espaces de la forme $L^2(0, T; X)$, on a les convergences faibles suivantes :

- $\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}^0 \equiv (\tilde{\mathbf{u}}^0, u_3^0)$, avec

$$\widetilde{\mathbf{u}}^0(\tilde{x}, x_3) = \mathbf{u}_H(\tilde{x}) - x_3 \boldsymbol{\nabla} w(\tilde{x}) \quad \text{et} \quad u_3^0(\tilde{x}, x_3) = w(\tilde{x});$$

- $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta^0$, avec

$$\theta^0(\tilde{x}, x_3) = \vartheta(\tilde{x}).$$

Analyse Asymptotique II

Théorème

Dans des espaces de la forme $L^2(0,T;X)$, on a les convergences faibles suivantes :

- $\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}^0 \equiv (\tilde{\mathbf{u}}^0, u_3^0)$, avec
$$\tilde{\mathbf{u}}^0(\tilde{x}, x_3) = \mathbf{u}_H(\tilde{x}) - x_3 \boldsymbol{\nabla} w(\tilde{x}) \quad \text{et} \quad u_3^0(\tilde{x}, x_3) = w(\tilde{x});$$
- $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta^0$, avec
$$\theta^0(\tilde{x}, x_3) = \vartheta(\tilde{x}).$$
- $\varphi^\varepsilon \rightharpoonup \varphi^0$ et $\zeta^\varepsilon \rightharpoonup \zeta^0$, où, suivant le modèle (i.e. les conditions aux limites),
$$\begin{array}{lcl} \varphi^0(\tilde{x}, x_3) = \phi(\tilde{x}) & \text{ou} & \varphi^0(\tilde{x}, x_3) = \sum_{k=0}^2 f_k(\tilde{x}) x_3^k, \\ \zeta^0(\tilde{x}, x_3) = \varsigma(\tilde{x}) & \text{ou} & \zeta^0(\tilde{x}, x_3) = \sum_{k=0}^2 z_k(\tilde{x}) x_3^k, \end{array}$$
étant f_k et z_k des coefficients tenant compte des couplages et dépendant de $\partial_{\alpha\beta} w(\tilde{x})$.

Analyse Asymptotique II

Théorème

Dans des espaces de la forme $L^2(0,T;X)$, on a les convergences faibles suivantes :

- $\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}^0 \equiv (\tilde{\mathbf{u}}^0, u_3^0)$, avec

$$\tilde{\mathbf{u}}^0(\tilde{x}, x_3) = \mathbf{u}_H(\tilde{x}) - x_3 \boldsymbol{\nabla} w(\tilde{x}) \quad \text{et} \quad u_3^0(\tilde{x}, x_3) = w(\tilde{x});$$

- $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta^0$, avec

$$\theta^0(\tilde{x}, x_3) = \vartheta(\tilde{x}).$$

- $\varphi^\varepsilon \rightharpoonup \varphi^0$ et $\zeta^\varepsilon \rightharpoonup \zeta^0$, où, suivant le modèle (i.e. les conditions aux limites),

$$\begin{aligned} \varphi^0(\tilde{x}, x_3) &= \phi(\tilde{x}) \quad \text{ou} \quad \varphi^0(\tilde{x}, x_3) = \textstyle\sum_{k=0}^2 f_k(\tilde{x}) x_3^k, \\ \zeta^0(\tilde{x}, x_3) &= \varsigma(\tilde{x}) \quad \text{ou} \quad \zeta^0(\tilde{x}, x_3) = \textstyle\sum_{k=0}^2 z_k(\tilde{x}) x_3^k, \end{aligned}$$

  étant f_k et z_k des coefficients tenant compte des couplages et dépendant de $\partial_{\alpha\beta} w(\tilde{x})$.

- Cas actionneur : Sène (2001) en **statique**, Raoult & Sène (2003) en **dynamique**, pour un milieu **piézoélectrique**.

Problèmes Limites I

Résultats Généraux

- Les problèmes limites se découplent en un problème de membrane et un problème de flexion.

Problèmes Limites I

Résultats Généraux

- Les problèmes limites se découplent en un problème de membrane et un problème de flexion.
- Le problème de membrane est partiellement ou totalement couplé, suivant le modèle.

Problèmes Limites I

Résultats Généraux

- Les problèmes limites se découplent en un problème de membrane et un problème de flexion.
- Le problème de membrane est partiellement ou totalement couplé, suivant le modèle.
- Le problème de flexion présente la même forme dans tous les cas.

Problèmes Limites I

Résultats Généraux

- Les problèmes limites se découplent en un problème de membrane et un problème de flexion.
- Le problème de membrane est partiellement ou totalement couplé, suivant le modèle.
- Le problème de flexion présente la même forme dans tous les cas.

Exemples

Actionneur Électrique et Magnétique

- Problème de membrane **thermo-élastique**.

Problèmes Limites I

Résultats Généraux

- Les problèmes limites se découplent en un problème de membrane et un problème de flexion.
- Le problème de membrane est partiellement ou totalement couplé, suivant le modèle.
- Le problème de flexion présente la même forme dans tous les cas.

Exemples

Actionneur Électrique et Magnétique

- Problème de membrane **thermo-élastique**.

Capteur Électrique et Magnétique

- Problème de membrane **magnéto-électro-thermo-élastique**.

Problème Limites II

Problème de Flexion

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} - \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{M} = \widetilde{f}_3 & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0,\ \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\partial_n\ddot{w} + \operatorname{div}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} + \partial_\tau(\mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \widetilde{g}_3 & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \gamma_0 \times (0,T), \end{cases}$$

$$\mathbf{M} \coloneqq -\frac{2\ell^3}{3}\mathbb{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w.$$

Problème Limites II

Problème de Flexion

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} - \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{M} = \tilde{f}_3 & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0,\ \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\partial_n\ddot{w} + \operatorname{div}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} + \partial_\tau(\mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \tilde{g}_3 & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \gamma_0 \times (0,T), \end{cases}$$

$$\mathbf{M} \coloneqq -\frac{2\ell^3}{3}\mathbb{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w.$$

- L'évolution tient compte d'un effet d'inertie de rotation.

Problème Limites II

Problème de Flexion

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} - \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{M} = \tilde{f}_3 & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0,\ \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\partial_n\ddot{w} + \operatorname{div}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} + \partial_\tau(\mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \tilde{g}_3 & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \gamma_0 \times (0,T), \end{cases}$$

$$\mathbf{M} \coloneqq -\frac{2\ell^3}{3}\mathbb{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w.$$

- L'évolution tient compte d'un effet d'inertie de rotation.
- Le tenseur $\mathbb{A} = (A_{\alpha\beta\sigma\tau})$ prend en compte les effets élastiques et les effets multiphysiques.

Problème Limites II

Problème de Flexion

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} - \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{M} = \tilde{f}_3 & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0,\ \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\partial_n\ddot{w} + \operatorname{div}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} + \partial_\tau(\mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \tilde{g}_3 & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \gamma_0 \times (0,T), \end{cases}$$

$$\mathbf{M} := -\frac{2\ell^3}{3}\mathbb{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w.$$

- L'évolution tient compte d'un effet d'inertie de rotation.
- Le tenseur $\mathbb{A} = (A_{\alpha\beta\sigma\tau})$ prend en compte les effets élastiques et les effets multiphysiques.
- Raoult (1985) a obtenu un problème analogue dans le cas d'un milieu **élastique**.

- Objectifs et Motivation
- Modélisation Mathématique
- **Simulation Numérique**
- Développements et Perspectives
- Conclusions

Problème de Flexion

- On considère $\gamma_0 = \partial\omega$ et les cas de plaque encastrée et simplement appuyée.
- On considère $\mathbb{A}$ tel que $\mathbf{M} = -D\Big((1-\nu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} w + \nu \Delta w \, \mathbf{I}\Big)$.

Problème de Flexion

- On considère $\gamma_0 = \partial\omega$ et les cas de plaque encastrée et simplement appuyée.
- On considère $\mathbb{A}$ tel que $\mathbf{M} = -D\Big((1-\nu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} w + \nu\Delta w\,\mathbf{I}\Big)$.

Plaque Encastrée

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} + D\Delta\Delta w = f & \text{dans } \omega\times(0,T), \\ w(0) = w_0,\ \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \partial\omega\times(0,T). \end{cases}$$

Problème de Flexion

- On considère $\gamma_0 = \partial\omega$ et les cas de plaque encastrée et simplement appuyée.
- On considère $\mathbb{A}$ tel que $\mathbf{M} = -D\Big((1-\nu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} w + \nu \Delta w \, \mathbf{I}\Big)$.

Plaque Encastrée

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} + D\Delta\Delta w = f & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0, \;\; \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0,T). \end{cases}$$

Plaque Simplement Appuyée

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} + D\Delta\Delta w = f & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0, \;\; \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ w = 0, \;\; \mathbf{Mn}\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0,T). \end{cases}$$

Problème de Flexion

- On considère $\gamma_0 = \partial\omega$ et les cas de plaque encastrée et simplement appuyée.
- On considère $\mathbb{A}$ tel que $\mathbf{M} = -D\Big((1-\nu)\boldsymbol{\nabla\nabla} w + \nu\Delta w\,\mathbf{I}\Big)$.

Plaque Encastrée

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} + D\Delta\Delta w = f & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0,\ \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0,T). \end{cases}$$

Plaque Simplement Appuyée

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{w} - \dfrac{2\ell^3}{3}\rho\Delta\ddot{w} + D\Delta\Delta w = f & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ w(0) = w_0,\ \dot{w}(0) = w_1 & \text{dans } \omega, \\ w = 0,\ \mathbf{Mn}\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0,T). \end{cases}$$

- Suivant le problème, on pose

$$V := H_0^2(\omega) \quad \text{ou} \quad V := H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega),$$
$$H := H_0^1(\omega) \quad [\neq L^2(\omega)].$$

Existence et Unicité

- Produit scalaire sur H :

$$b(u,v) := 2\ell\rho \int_\omega \left(uv + \frac{\ell^2}{3} \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \right).$$

Existence et Unicité

- Produit scalaire sur H :

$$b(u,v) \coloneqq 2\ell\rho \int_\omega \left(uv + \frac{\ell^2}{3} \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \right).$$

- Forme bilinéaire sur V :

$$a(u,v) \coloneqq \int_\omega \Big(D\nu \, \Delta u \, \Delta v + D(1-\nu) \, \boldsymbol{\nabla\nabla} u : \boldsymbol{\nabla\nabla} v \Big).$$

Existence et Unicité

- Produit scalaire sur H :

$$b(u,v) \coloneqq 2\ell\rho \int_\omega \left(uv + \frac{\ell^2}{3} \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \right).$$

- Forme bilinéaire sur V :

$$a(u,v) \coloneqq \int_\omega \Big(D\nu \, \Delta u \, \Delta v + D(1-\nu) \, \boldsymbol{\nabla\nabla} u : \boldsymbol{\nabla\nabla} v \Big).$$

- Forme linéaire sur H à identifier avec $b(F(t),v)$ pour $F \in L^2(0,T;H)$:

$$L_t(v) \coloneqq \int_\omega f(t) v = b(F(t),v).$$

Existence et Unicité

- Produit scalaire sur H :

$$b(u,v) \coloneqq 2\ell\rho \int_\omega \left(uv + \frac{\ell^2}{3} \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \right).$$

- Forme bilinéaire sur V :

$$a(u,v) \coloneqq \int_\omega \Big(D\nu\, \Delta u\, \Delta v + D(1-\nu)\, \boldsymbol{\nabla\nabla} u : \boldsymbol{\nabla\nabla} v \Big).$$

- Forme linéaire sur H à identifier avec $b(F(t),v)$ pour $F \in L^2(0,T;H)$:

$$L_t(v) \coloneqq \int_\omega f(t)v = b(F(t),v).$$

- Le problème suivant est bien posé (J.-L. Lions) :

Trouver $w \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H)$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} b(w(t),v) + a(w(t),v) = b(F(t),v),$$

$$w(0) = w_0 \in V, \ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(0) = w_1 \in H.$$

Simulation Numérique

Problème Semi-Discret (Raviart & Thomas, 1983)

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{M}^h \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^2}(t) + \mathcal{K}^h \boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^h(t), \\ \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0,\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = \boldsymbol{\xi}_1, \\ \mathcal{M}^h_{ij} \coloneqq b(\varphi_i, \varphi_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant N},\ \mathcal{K}^h_{ij} \coloneqq a(\varphi_i, \varphi_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}.\end{gathered}}$$

Méthodes de Discrétisation

- Discrétisation en espace : **éléments finis HCT**.

Simulation Numérique

Problème Semi-Discret (Raviart & Thomas, 1983)

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{M}^h \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^2}(t) + \mathcal{K}^h \boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^h(t),\\ \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0,\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = \boldsymbol{\xi}_1,\\ \mathcal{M}^h_{ij} \coloneqq b(\varphi_i, \varphi_j)_{1\leqslant i,j\leqslant N},\ \ \mathcal{K}^h_{ij} \coloneqq a(\varphi_i, \varphi_j)_{1\leqslant i,j\leqslant N}.\end{gathered}}$$

Méthodes de Discrétisation

- Discrétisation en espace : **éléments finis HCT**.
- Discrétisation en temps : **Newmark, point milieu**.

Simulation Numérique

Problème Semi-Discret (Raviart & Thomas, 1983)

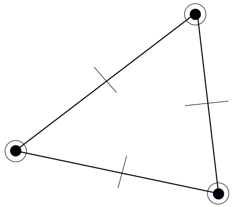
$$\mathcal{M}^h \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^2}(t) + \mathcal{K}^h\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^h(t),$$
$$\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0,\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = \boldsymbol{\xi}_1,$$
$$\mathcal{M}^h_{ij} := b(\varphi_i, \varphi_j)_{1\leqslant i,j\leqslant N},\ \ \mathcal{K}^h_{ij} := a(\varphi_i, \varphi_j)_{1\leqslant i,j\leqslant N}.$$

Méthodes de Discrétisation

- Discrétisation en espace : **éléments finis HCT**.
- Discrétisation en temps : **Newmark, point milieu**.

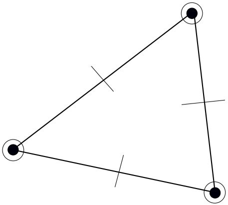
- Implémentation sous l'environnement **FreeFEM++**.

Élément HCT

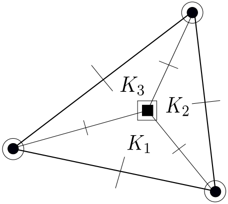


- Élément fini C^1.
- Nombre de DDL = 12.

Élément HCT

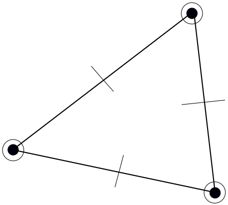


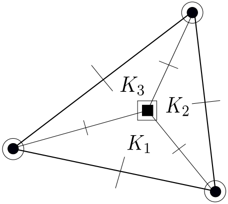
- Élément fini C^1.
- Nombre de DDL = 12.



- Un polynôme de degré 3 est défini sur chaque K_i.

Élément HCT



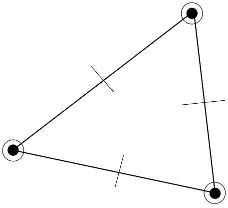


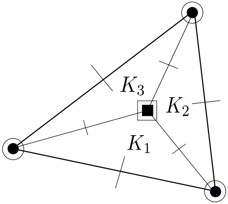
- Élément fini C^1.
- Nombre de DDL = 12.

- Un polynôme de degré 3 est défini sur chaque K_i.

- **Estimation d'erreur :** si $w \in H^4(\omega)$, on a $\|w - w_h\|_{H^2(\omega)} \leqslant Ch^2$ (Ciarlet, 1974).

Élément HCT





- Élément fini C^1.
- Nombre de DDL = 12.

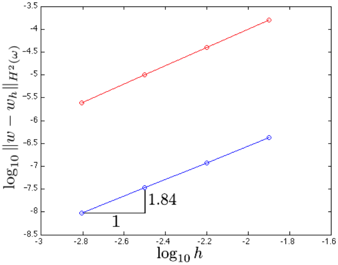
- Un polynôme de degré 3 est défini sur chaque K_i.

- **Estimation d'erreur :** si $w \in H^4(\omega)$, on a $\|w - w_h\|_{H^2(\omega)} \leqslant Ch^2$ (Ciarlet, 1974).
- **Schéma de quadrature adapté :** formule exacte pour les polynômes de degré 2 sur chaque K_i et nœuds en dehors des interfaces entre K_i et K_j ($\partial_{\alpha\beta} w$ non continues sur ces interfaces).

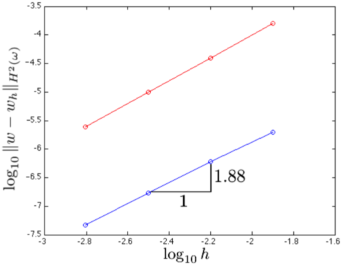
Test Statique

Plaque Circulaire Encastrée

$$\begin{cases} D\,\Delta\Delta w = f & \text{dans } \omega, \\ w = \partial_n w = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} , \qquad \begin{array}{c} \omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < R^2\}, \\ R = 5\,cm. \end{array}$$



(1)



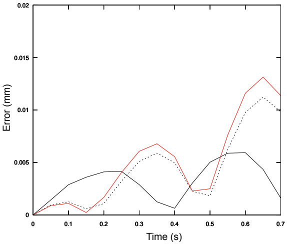
(2)

Erreur en norme H^2 (maillages emboîtés) pour $w(x,y) = \frac{f_0}{64D}(R^2 - (x^2 + y^2))^2$ (1) et $w(x,y) = \frac{f_0}{64D}(R^2 - (x^2 + y^2))^2 \sin(ax)$, $a = 0.5\,cm^{-1}$ (2). Pente de la droite rouge = 2.

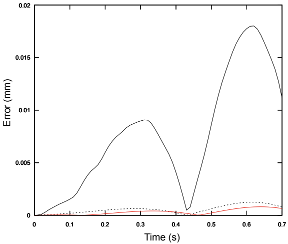
Test Dynamique

Plaque Rectangulaire Simplement Appuyée

- $\omega = (0, a) \times (0, b)$, $a = 6\,cm$, $b = 8\,cm$.
- $f \equiv 0\,;\, w_0(x, y) \equiv 0$, $w_1(x, y) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$, $\alpha = 1\,mm$, $\kappa = 10\,s^{-1}$.
- Solution exacte $w(x, y; t) = \frac{\alpha}{\kappa} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \sin(\kappa t)$.



(1)



(2)

Évolution de l'erreur pour un pas de temps $\Delta t = 0.05\ s$ (1) et $\Delta t = 0.01\ s$ (2), avec trois maillages emboîtés. Courbe continue : 13 éléments ; courbe discontinue : 52 éléments ; courbe rouge : 208 éléments.

Développements et Perspectives

- Justification rigoureuse de la convergence de la solution du problème général vers celle du problème quasi-statique lorsque $\delta \to 0$.

Développements et Perspectives

- Justification rigoureuse de la convergence de la solution du problème général vers celle du problème quasi-statique lorsque $\delta \to 0$.
- Extension aux structures en forme de coque.

Développements et Perspectives

- Justification rigoureuse de la convergence de la solution du problème général vers celle du problème quasi-statique lorsque $\delta \to 0$.
- Extension aux structures en forme de coque.
- Étude d'une structure laminée, de type plaque ou coque, contenant une couche de matériau METE.

Développements et Perspectives

- Justification rigoureuse de la convergence de la solution du problème général vers celle du problème quasi-statique lorsque $\delta \to 0$.
- Extension aux structures en forme de coque.
- Étude d'une structure laminée, de type plaque ou coque, contenant une couche de matériau METE.
- Étude d'une méthode de discrétisation en espace **non conforme** de type **HHO** pour le problème de flexion en statique, et couplage avec la méthode de Newmark en dynamique.

Développements et Perspectives

- Justification rigoureuse de la convergence de la solution du problème général vers celle du problème quasi-statique lorsque $\delta \to 0$.
- Extension aux structures en forme de coque.
- Étude d'une structure laminée, de type plaque ou coque, contenant une couche de matériau METE.
- Étude d'une méthode de discrétisation en espace **non conforme** de type **HHO** pour le problème de flexion en statique, et couplage avec la méthode de Newmark en dynamique.
- Calcul d'un cas réel d'ingénierie et comparaison des méthodes numériques.

Méthode HHO pour le Problème de Flexion I

- Problème de flexion **statique** :

Étant donnée $f \in L^2(\omega),$ trouver $u \in H_0^2(\omega)$ telle que

$$\frac{2\ell^3}{3}\int_\omega \mathbb{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}u : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}v =: a_\omega(u,v) = l(v) \coloneqq \int_\omega fv, \quad \forall v \in H_0^2(\omega).$$

Méthode HHO pour le Problème de Flexion I

- Problème de flexion **statique** :

  Étant donnée $f \in L^2(\omega),$ trouver $u \in H_0^2(\omega)$ telle que

$$\frac{2\ell^3}{3}\int_\omega \mathbb{A}\boldsymbol{\nabla\nabla} u : \boldsymbol{\nabla\nabla} v =: a_\omega(u,v) = l(v) := \int_\omega fv, \quad \forall v \in H_0^2(\omega).$$

- Méthode **hybride d'ordre élevé (HHO)** (Di Pietro, Ern, Lemaire, 2014).

Méthode HHO pour le Problème de Flexion I

- Problème de flexion **statique** :

Étant donnée $f \in L^2(\omega),$ trouver $u \in H_0^2(\omega)$ telle que

$$\frac{2\ell^3}{3}\int_\omega \mathbb{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}u : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}v =: a_\omega(u,v) = l(v) \coloneqq \int_\omega fv, \quad \forall v \in H_0^2(\omega).$$

- Méthode **hybride d'ordre élevé (HHO)** (Di Pietro, Ern, Lemaire, 2014).

Caractéristiques Essentielles

Méthode HHO pour le Problème de Flexion I

- Problème de flexion **statique** :

$$\text{Étant donnée } f \in L^2(\omega), \text{ trouver } u \in H_0^2(\omega) \text{ telle que}$$

$$\frac{2\ell^3}{3}\int_\omega \mathbb{A}\boldsymbol{\nabla\nabla} u : \boldsymbol{\nabla\nabla} v =: a_\omega(u,v) = l(v) \coloneqq \int_\omega fv, \quad \forall v \in H_0^2(\omega).$$

- Méthode **hybride d'ordre élevé (HHO)** (Di Pietro, Ern, Lemaire, 2014).

Caractéristiques Essentielles

- Inconnues discrètes polynômiales *indépendantes* de degré arbitraire, définies sur les faces F et sur les cellules T du maillage. Espace des DDL locaux :

$$\underline{U}_T^k \coloneqq \mathbb{P}_2^k(T) \times \left\{ \bigtimes_{F\in\mathcal{F}_T} [\mathbb{P}_1^k(F)]^2 \right\} \times \left\{ \bigtimes_{F\in\mathcal{F}_T} \mathbb{P}_1^{k-1}(F) \right\}, \quad \underline{v}_T = (v_T, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\nabla},F}, v_F).$$

Méthode HHO pour le Problème de Flexion I

- Problème de flexion **statique** :

Étant donnée $f \in L^2(\omega)$, trouver $u \in H_0^2(\omega)$ telle que

$$\frac{2\ell^3}{3} \int_\omega \mathbb{A}\boldsymbol{\nabla\nabla} u : \boldsymbol{\nabla\nabla} v =: a_\omega(u,v) = l(v) := \int_\omega fv, \quad \forall v \in H_0^2(\omega).$$

- Méthode **hybride d'ordre élevé (HHO)** (Di Pietro, Ern, Lemaire, 2014).

Caractéristiques Essentielles

- Inconnues discrètes polynômiales *indépendantes* de degré arbitraire, définies sur les faces F et sur les cellules T du maillage. Espace des DDL locaux :

$$\underline{U}_T^k := \mathbb{P}_2^k(T) \times \left\{ \bigtimes_{F \in \mathcal{F}_T} [\mathbb{P}_1^k(F)]^2 \right\} \times \left\{ \bigtimes_{F \in \mathcal{F}_T} \mathbb{P}_1^{k-1}(F) \right\}, \quad \underline{v}_T = (v_T, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\nabla},F}, v_F).$$

- Opérateur de **reconstruction locale** $p_{\Delta,T}^{k+2} : \underline{U}_T^k \to \mathbb{P}^{k+2}(T)$:

$$\begin{aligned} a_T(p_{\Delta,T}^{k+2}\underline{v}_T, w) = \quad & a_T(v_T, w) - \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\nabla},F} - \boldsymbol{\nabla} v_T, \mathbf{M}_w \mathbf{n}_{TF} \right)_F + \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \left(v_F - v_T, \operatorname{div} \mathbf{M}_w \cdot \mathbf{n}_{TF} \right)_F , \end{aligned}$$

pour tout $w \in \mathbb{P}^{k+2}(T)$, où $\mathbf{M}_w := -\frac{2\ell^3}{3}\mathbb{A}\boldsymbol{\nabla\nabla} w \in [\mathbb{P}^k(T)]^4$.

Méthode HHO pour le Problème de Flexion II

- Forme bilinéaire locale :

$$\widehat{a}_T(\underline{u}_T, \underline{v}_T) = a_T(p_{\Delta,T}^{k+2}\underline{u}_T, p_{\Delta,T}^{k+2}\underline{v}_T) + s_T(\underline{u}_T, \underline{v}_T), \quad \forall(\underline{u}_T, \underline{v}_T) \in \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k.$$

Méthode HHO pour le Problème de Flexion II

- Forme bilinéaire locale :

$$\widehat{a}_T(\underline{u}_T, \underline{v}_T) = a_T(p_{\Delta,T}^{k+2}\underline{u}_T, p_{\Delta,T}^{k+2}\underline{v}_T) + s_T(\underline{u}_T, \underline{v}_T), \quad \forall (\underline{u}_T, \underline{v}_T) \in \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k.$$

- Forme bilinéaire globale :

$$\widehat{a}_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) \coloneqq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \widehat{a}_T(\underline{L}_T \underline{u}_h, \underline{L}_T \underline{v}_h), \quad \forall (\underline{u}_h, \underline{v}_h) \in \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k.$$

Méthode HHO pour le Problème de Flexion II

- Forme bilinéaire locale :

$$\widehat{a}_T(\underline{u}_T, \underline{v}_T) = a_T(p_{\Delta,T}^{k+2}\underline{u}_T, p_{\Delta,T}^{k+2}\underline{v}_T) + s_T(\underline{u}_T, \underline{v}_T), \quad \forall(\underline{u}_T, \underline{v}_T) \in \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k.$$

- Forme bilinéaire globale :

$$\widehat{a}_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) \coloneqq \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \widehat{a}_T(\underline{L}_T\underline{u}_h, \underline{L}_T\underline{v}_h), \quad \forall(\underline{u}_h, \underline{v}_h) \in \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k.$$

En cours :

- Preuve de la *coercivité* de $\widehat{a}_h(\cdot,\cdot)$.
- Preuve de la *consistance* du problème discret.
- Déduction d'estimations d'erreur.

- **Objectifs et Motivation**
- **Modélisation Mathématique**
- **Simulation Numérique**
- **Développements et Perspectives**
- **Conclusions**

Conclusions

- Nous avons présenté un modèle mathématique de structures de type capteur ou actionneur, avec couplages linéaires METE, et nous avons montré que les problèmes général et quasi-statique sont bien posés.

Conclusions

- Nous avons présenté un modèle mathématique de structures de type capteur ou actionneur, avec couplages linéaires METE, et nous avons montré que les problèmes général et quasi-statique sont bien posés.
- Nous avons déduit un modèle bidimensionnel pour une structure en forme de plaque, en considérant quatre types différents de conditions au bord. Résultats de l'analyse asymptotique validés grâce à des théorèmes de convergence faible.

Conclusions

- Nous avons présenté un modèle mathématique de structures de type capteur ou actionneur, avec couplages linéaires METE, et nous avons montré que les problèmes général et quasi-statique sont bien posés.
- Nous avons déduit un modèle bidimensionnel pour une structure en forme de plaque, en considérant quatre types différents de conditions au bord. Résultats de l'analyse asymptotique validés grâce à des théorèmes de convergence faible.
- Nous avons traité numériquement le problème de flexion caractérisant tous les quatre problèmes de plaque en utilisant la méthode de Newmark du point milieu combinée avec une discrétisation conforme de type HCT.

Conclusions

- Nous avons présenté un modèle mathématique de structures de type capteur ou actionneur, avec couplages linéaires METE, et nous avons montré que les problèmes général et quasi-statique sont bien posés.
- Nous avons déduit un modèle bidimensionnel pour une structure en forme de plaque, en considérant quatre types différents de conditions au bord. Résultats de l'analyse asymptotique validés grâce à des théorèmes de convergence faible.
- Nous avons traité numériquement le problème de flexion caractérisant tous les quatre problèmes de plaque en utilisant la méthode de Newmark du point milieu combinée avec une discrétisation conforme de type HCT.
- Nous avons indiqué des perspectives pour des travaux futurs, en donnant un premier aperçu sur l'étude d'une discrétisation non conforme de type HHO pour le problème de flexion en statique.

Merci de votre attention

Actionneur Électrique et Magnétique

- $\mathbb{A} = \widetilde{\mathbb{C}} - \widetilde{\mathbf{P}}_3 \otimes \mathbf{\Lambda} - \widetilde{\mathbf{R}}_3 \otimes \mathbf{\Gamma},$

$$\Lambda_{\alpha\beta} \coloneqq \frac{\widetilde{M}_{33}\widetilde{P}_{3\alpha\beta} - \tilde{\alpha}_{33}\widetilde{R}_{3\alpha\beta}}{\widetilde{M}_{33}\widetilde{X}_{33} - \tilde{\alpha}_{33}^2}, \quad \Gamma_{\alpha\beta} \coloneqq \frac{\tilde{\alpha}_{33}\widetilde{P}_{3\alpha\beta} - \widetilde{X}_{33}\widetilde{R}_{3\alpha\beta}}{\widetilde{M}_{33}\widetilde{X}_{33} - \tilde{\alpha}_{33}^2}.$$

Actionneur Électrique et Magnétique

- $\mathbb{A} = \widetilde{\mathbb{C}} - \widetilde{\mathbf{P}}_3 \otimes \mathbf{\Lambda} - \widetilde{\mathbf{R}}_3 \otimes \mathbf{\Gamma},$

$$\Lambda_{\alpha\beta} \coloneqq \frac{\widetilde{M}_{33}\widetilde{P}_{3\alpha\beta} - \widetilde{\alpha}_{33}\widetilde{R}_{3\alpha\beta}}{\widetilde{M}_{33}\widetilde{X}_{33} - \widetilde{\alpha}_{33}^2}, \quad \Gamma_{\alpha\beta} \coloneqq \frac{\widetilde{\alpha}_{33}\widetilde{P}_{3\alpha\beta} - \widetilde{X}_{33}\widetilde{R}_{3\alpha\beta}}{\widetilde{M}_{33}\widetilde{X}_{33} - \widetilde{\alpha}_{33}^2}.$$

- On obtient par conséquent :

$$A_{1111} = A_{2222} = 124 \text{ GPa}, \quad A_{1122} = 34 \text{ GPa}, \quad A_{1212} = 45 \text{ GPa}.$$

Tenseur de Masse

- Quantités fondamentales : masse, . . . $\Rightarrow$ Densité de masse scalaire.

Tenseur de Masse

- Quantités fondamentales : masse, . . . $\Rightarrow$ Densité de masse scalaire.
- Quantités fondamentales : puissance, énergie, . . .

Tenseur de Masse

- Quantités fondamentales : masse, … $\Rightarrow$ Densité de masse scalaire.
- Quantités fondamentales : puissance, énergie, …

  Puissance interne $\coloneqq$ dérivée par rapport au temps
  de l'énergie totale + puissance inertielle.

  Axiome pour la puissance **inertielle** : $\pi^{in} = \mathbf{f}_0(\Theta) \cdot \mathbf{v}$,
  $\Theta =$ liste de variables d'état, y compris $\dot{\mathbf{v}}$.

  Axiome pour la puissance interne : $\alpha = \alpha(\Theta, \mathbf{v})$, invariante par translation.

Tenseur de Masse

- Quantités fondamentales : masse, . . . $\Rightarrow$ Densité de masse scalaire.
- Quantités fondamentales : puissance, énergie, . . .

Puissance interne $:=$ dérivée par rapport au temps de l'énergie totale + puissance inertielle.

Axiome pour la puissance **inertielle** : $\pi^{in} = \mathbf{f}_0(\Theta) \cdot \mathbf{v}$,
$\Theta =$ liste de variables d'état, y compris $\dot{\mathbf{v}}$.

Axiome pour la puissance interne : $\alpha = \alpha(\Theta, \mathbf{v})$, invariante par translation.

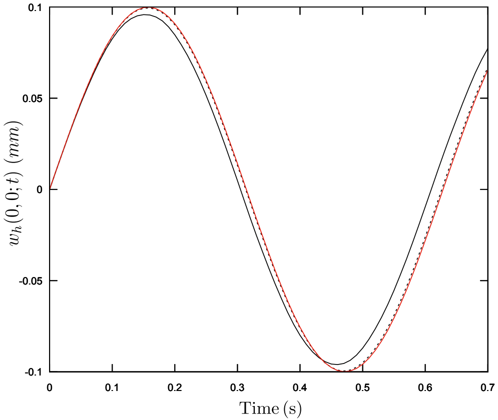
Théorème de Décomposition de l'Énergie (Podio-Guidugli, 1997)

Il existe $\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{Sym}$ vérifiant $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ et $\epsilon(\Theta) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\tau(\Theta, \mathbf{v}) = \epsilon(\Theta) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

$$\mathbf{f}^{in}(\Theta, \mathbf{v}) = -\boldsymbol{\rho}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}^{in}(\Theta, \mathbf{v})\mathbf{v}, \;\; \mathbf{F}^{in}(\Theta, \mathbf{v}) \in \mathrm{Skw}\,.$$

Plaque Simplement Appuyée



Problèmes Limites III

Exemple : problème membranaire pour le **modèle capteur-actionneur**.

Problème Thermo-Piézoélectrique 2D

$$\begin{cases} 2\ell\rho\ddot{\mathbf{u}}_H - \operatorname{div}\widetilde{\mathbb{N}} = \widetilde{\mathbf{f}} + \widetilde{\mathbf{R}}_3[\![\boldsymbol{\nabla}\zeta]\!] & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{D}} = \widetilde{d} + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_3 \cdot [\![\boldsymbol{\nabla}\zeta]\!] & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ \dot{\widetilde{\mathcal{S}}} + \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{q}} = \widetilde{r} + \widetilde{m}_3[\![\dot{\zeta}]\!] & \text{dans } \omega \times (0,T), \\ \mathbf{u}_H(0) = \mathbf{u}_{H,0},\ \dot{\mathbf{u}}_H(0) = \mathbf{u}_{H,1},\ \vartheta(0) = \vartheta_0 & \text{dans } \omega, \\ \widetilde{\mathbb{N}}\mathbf{n} = \widetilde{\mathbf{g}} - [\![\zeta]\!]\widetilde{\mathbf{R}}_3\mathbf{n} & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ \widetilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} = [\![\zeta]\!]\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_3 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ -\widetilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} = \widetilde{\varrho} & \text{sur } \gamma_1 \times (0,T), \\ \mathbf{u}_H = \mathbf{0},\ \ \phi = \vartheta = 0 & \text{sur } \gamma_0 \times (0,T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbb{N}} \coloneqq 2\ell(\widetilde{\mathbf{C}}\,\widetilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}_H) + \widetilde{\mathbf{P}}\boldsymbol{\nabla}\phi - \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\vartheta), \\ \widetilde{\mathbf{D}} \coloneqq 2\ell(\widetilde{\mathbf{P}}^T\widetilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}_H) - \widetilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\nabla}\phi + \widetilde{\mathbf{p}}\vartheta), \\ \widetilde{\mathcal{S}} \coloneqq 2\ell(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} : \widetilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}_H) - \widetilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi + \widetilde{c}_v\vartheta), \\ \widetilde{\mathbf{q}} \coloneqq -\frac{2\ell}{T_0}\widetilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\nabla}\vartheta. \end{cases}$$