UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

L3 Mécanique, Mathématiques-Polytech MI 3

HLME 606 TP1 : Vibrations d'un système à *n* ressorts

Afin de garder une trace de vos travaux, il est recommandé de créer dans votre espace de travail un répertoire où vous pouvez les enregistrer.

1 Prise en main

1. Rappeler l'équation du mouvement d'une masse m attachée à un ressort de raideur k.
2. Donner la solution analytique u_{exact}.
3. Consulter la commande $ode23tx$ de Matlab , et donner la solution numérique, u_{num} de ce problème.
4. Comparer les deux solutions u_{exact}, u_{num}.

2 Système à ressorts

On considère un système de N masses $m_1, m_2, ..., m_N$ attachées entre elles par des ressorts linéaires de rigidité $k_1, k_2, ..., k_N$. Le dernier ressort est fixe et la seule force extérieure $F\ (t)$ s'exerce sur l'extrémité de masse m_1 (voir FIGURE 1). On suppose qu'à l'instant initial le système est au repos (pas de déplacement et de vitesse initiale).

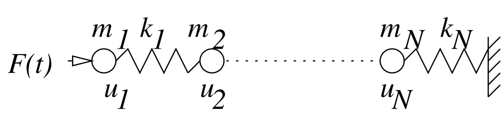

FIGURE 1 – Système à ressorts.

1. En notant u_i le déplacement du $i-$ème point, montrer que l'évolution du mouvement de ce système s'écrit sous la forme matricielle :

$$\mathbf{M}\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}(t)+\mathbf{K}\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{F}(t),\ \mathbf{u}(0) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0) = 0 \quad (1)$$

où $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_N]$ est le vecteur de déplacement.

2. Expliciter la forme des matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$.

Le système (1) peut être résolu de deux façons différentes. La première est la combinaison linéaire des solutions particulières (cf cours). La deuxième approche, adoptée ici, consiste à découpler les inconnues du système en cherchant la solution dans sa base spectrale : on calcule dans un premier temps *les déplacements normaux* (ou modes propres) $q(t)$, ensuite on peut déterminer le vrai champ de déplacements (*déplacements naturels*) $u(t)$ par changement de base. En introduisant la variable $\mathbf{w}(t) = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{u}(t)$, montrer que le système (1) devient :

$$\frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2}(t)+\mathbf{T}\mathbf{w}(t) = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}(t), \mathbf{w}(0) = \frac{d\mathbf{w}}{dt}(0) = 0. \quad (2)$$

3. Que vaut la matrice $\mathbf{T}$? Cette matrice $\mathbf{T}$ est symétrique définie positive (à admettre). On note $\boldsymbol{\Lambda}$ (respectivement $\mathbf{V}$) la matrice de ses valeurs propres (respectivement ses vecteurs propres).
4. Ecrire le système différentiel verifié par la nouvelle variable $\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}^T\mathbf{w}(t)$.
5. Expliquer alors comment on peut obtenir $\mathbf{u}(t)$.

On montre que : $q_j(t) = (\int_0^t \frac{\sin(\lambda_j^{1/2}(t-\tau))}{\lambda_j^{1/2}} F(\tau)d\tau)\mathbf{e}_j^T\mathbf{V}^T\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{e}_1$, $1 \leq j \leq N$ (les $\mathbf{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique) .
6. Récupérer les fonctions `init-ressort.m`, `manipfilm.m`, `spectre.m`, `film.m`.
7. Essayer de comprendre l'utilité et le fonctionnement de chaque code (lien avec les questions précédentes). Lancer le film de simulation (fichier **manipfilm.m**).
8. Trouver où la force de vibration $F\ (t)$ est introduite dans le code. En particulier indiquer comment faire pour imposer une force différente de celle utilisée.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
L3 Mécanique, Mathématiques - Polytech MI 3
HLME 606 TP2 : Cordes vibrantes

1 Introduction

Les oscillations d'une corde élastique sont décrites par l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad \forall t > 0 \tag{1}$$

où $u(x,t)$ est l'amplitude des mouvements transversaux de la corde. La vitesse de propagation c dépend de la tension τ dans la corde et de sa densité linéique ρ suivant la loi :

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{2}$$

Les oscillations dépendent des *conditions initiales* qui s'écrivent :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \tag{3}$$

et qui sont respectivement la position et la vitesse initiale de la corde. Si la corde est de longueur infinie (ou supposée infinie), le problème défini par (1) et (3) est bien posé sur $\mathbb{R}$.
Si la corde est de longueur finie l, alors il est impératif d'ajouter 2 conditions, dites *conditions aux limites*, pour que le problème soit bien posé. Par exemple, si la corde est fixée aux extrémités alors les conditions aux limites sont :

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \forall t > 0 \tag{4}$$

L'objectif de ce TP est d'écrire puis d'implémenter sous **Matlab** un algorithme qui permet de résoudre le problème de la corde vibrante. Afin de valider ce programme on étudiera la solution exacte que l'on comparera à la solution numérique et ceci dans les deux cas où la corde est de longueur finie et infinie.

2 Corde de longueur infinie

2.1 Solution exacte

En utilisant le changement de variables :

$$X = \alpha x + \beta t \;\;,\;\; T = \gamma x + \mu t \;\;,\;\; (\alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}^+) \tag{5}$$

on définit la fonction $U(X,T) = u(x,t)$ et on se propose de calculer la solution exacte du problème (1)-(3)

a) Exprimer $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en fonction des dérivées de U. En déduire que U est solution de l'E.D.P. suivante :

$$(\mu^2 - c^2\gamma^2)\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + (\beta^2 - c^2\alpha^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + 2(\beta\mu - c^2\alpha\gamma)\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} = 0 \tag{6}$$

b) Montrer que si on choisit $\mu = c\gamma$ et $\beta = -c\alpha$, on a :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} = 0 \tag{7}$$

En déduire qu'il existe une fonction F et une fonction G telles que :

$$U(X, T) = F(X) + G(T) \tag{8}$$

puis que la solution de l'équation (1) s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{9}$$

c) En utilisant les conditions initiales (3), montrer que :

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds \tag{10}$$

Cette expression montre que la valeur de u en un point x et à un instant t ne dépend que des valeurs des données initiales $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sur l'intervalle [x-ct,x+ct].

2.2 Résolution numérique

La résolution numérique d'une équation différentielle comporte deux étapes essentielles :

– la discrétisation du domaine :
On définit une discrétisation en espace sur un intervalle $[a, b]$

$$x_j = a + j\delta x, \quad \delta x = \frac{b - a}{J}, \quad j = 0, 1, ..., J \tag{11}$$

et une discrétisation en temps : pour $T > 0$ fixé, on définit les instants intermédiaires

$$t_n = n\delta t, \qquad \delta t = T/N, \quad n = 0, ..., N \tag{12}$$

– la construction d'un schéma numérique :
Cette opération essentielle consiste à déterminer une relation entre l'état du système étudié à un instant donné en fonction des états du système aux instant précédents. Cette relation, appelée schéma numérique, est obtenue en discrétisant l'opérateur différentiel intervenant dans l'équation différentielle.

a) On approche la dérivée seconde par l'expression suivante :

$$u''(\alpha_n) \simeq \frac{u(\alpha_{n+1}) - 2u(\alpha_n) + u(\alpha_{n-1})}{h^2} \tag{13}$$

où h est le pas de discrétisation. En déduire le schéma numérique suivant pour l'équation de la corde vibrante

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\delta x^2} \tag{14}$$

Justifier alors l'algorithme suivant pour la résolution du problème (1)-(3)

* Connaissant les conditions initiales $u_0(x_j)$ et $u_1(x_j)$, on calcule u_j^0, u_j^1 par

$$u_j^0 = u_0(x_j), u_j^1 = u_j^0 + \delta t\, u_1(x_j) \tag{15}$$

* Pour $n \geq 1$, on calcule :

$$u_j^{n+1} = 2\left(1 - \sigma^2\right) u_j^n + \sigma^2 \left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) - u_j^{n-1} \tag{16}$$

où

$$\sigma = |c| \frac{\delta t}{\delta x}$$

b) – On suppose que les données initiales u_0 et u_1 sont périodiques de période commune **p**. Montrer que la solution $u(x,t)$ est périodique en espace de période **p** et que si, de plus, u_1 a moyenne nulle sur une période, elle est périodique en temps de période **p**/c.
– Vérifier numériquement cette propriété en implémentant un programme appliquant l'algorithme (15)-(16). On choisira une longueur de corde $l = 1$, une célérité $c = 2$ et les conditions initiales $u_0(x) = sin(2\pi x) + sin(10\pi x)/4$ et $u_1(x) = 0$.
– Proposer d'autres conditions initiales (périodiques).

3 Corde de longueur finie

On considère l'équation des ondes (1) avec les conditions initiales (3) et les conditions aux limites (4). On cherche la solution sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k(t) \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \tag{17}$$

1) Ecrire et résoudre l'E.D.O. vérifiée par chaque fonction v_k.
2) Montrer que la solution exacte pour la corde vibrante finie est :

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[A_k \, cos\left(\frac{k\pi}{l} ct\right) + B_k sin\left(\frac{k\pi}{l} ct\right)\right] \phi_k(x) \tag{18}$$

avec

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \phi_k(x) dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^l u_1(x) \phi_k(x) dx \tag{19}$$

En déduire la période en temps et en espace de la solution.
3) Ecrire un programme pour résoudre le problème de la corde vibrante finie en utilisant le schéma numérique (14). On utilisera le programme développé à l'exercice précédent, en prenant garde d'utiliser les conditions limites.
4) Trouver la solution exacte correspondant aux conditions initiales suivantes :

$$u_0(x) = sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) + \frac{1}{4} sin\left(10 \frac{\pi}{l} x\right), \quad u_1(x) = 0 \tag{20}$$

Tracer la solution exacte et la solution numérique pour plusieurs instants de temps sur une période. Données numériques : $c = 2$, $l = 1$, $nx = 50$, $nt = 125$.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
L3 Mécanique, Mathématiques - Polytech MI 3
HLME 606 TP3 : L'effet papillon

Les mouvements atmosphériques peuvent être modélisés d'une façon simple par un système de 3 équations différentielles du premier ordre. Ce modèle est dû aux travaux du mathématicien et météorologiste E. N. Lorenz. Il est connu par sa forte sensibilité aux conditions initiales (CI), une petite variation des CI peut engendrer des solutions non prévues. D'autre part, la solution peut avoir un comportement chaotique pour certains choix de paramètres intervenants dans le système. Pour d'autres valeurs, la trajectoire peut converger vers un point fixe, vers l'infini ou osciller périodiquement. Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\beta x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= -\sigma(x_2 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= -x_2 x_1 + \rho x_2 - x_3 \end{cases} \tag{1}$$

La variable $x_1(t)$ est liée à la convection dans l'atmosphère alors que les deux variables $x_2(t), x_3(t)$ sont liées aux variations de la température. Le réel σ est dit nombre de Prandlt, ρ le nombre de Rayleigh et β dépend de la géométrie du domaine étudié. Souvent, on prend $\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$.

1. Écrire le système (1) sous une forme matricielle $\dot{x}(t) = A.x$ où $x = [x_1, x_2, x_3]^T$
2. Résoudre numériquement le système (1) pour les conditions initiales :
   CI1 : $x^1(t_0) = [10, 15, 20]$
   CI2 : $x^2(t_0) = x^1(t_0) + \varepsilon$ où ε est petit devant les autres valeurs de $x^1(t_0)$. Tracer les trajectoires $x(t)$ ainsi que l'erreur entre les deux solutions pour différentes valeurs de ε. Commentaires.
3. Déterminer les trajectoires x pour différentes valeurs du paramètre ρ (0.5, 4, 10, 14, 28, 40). Courbes et commentaires.

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

L3 Mécanique, Mathématiques - Polytech MI 3

HLME 606 TP4 : Equation de la chaleur

Travail demandé

- récupérer sur l'espace pédagogique le fichier MolerCh11.pdf et les codes Matlab,
- lire ce chapitre du livre de Moler dédié à l'étude des équations aux dérivées partielles et à leur résolution numérique avec Matlab,
- faire l'exercice 11.4 : questions (b) et (c) ,
- modifier le code *Chaleur1d_condition_initiale.m* qui intervient dans le traitement de la question 11.4 c) pour résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & \text{pour } 0 < x < 1 \ ; \ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos(2\pi x) & \text{pour } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Pour $\mu = 1$, résoudre ce problème et comparer la solution numérique obtenue avec la solution exacte :

$$u(x,t) = 1 + e^{-4\pi^2 \mu t} \cos(2\pi x)$$

(afficher l'évolution au cours du temps des solutions exactes et approchées, ainsi que l'erreur).

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2 **Année universitaire 2013-2014**

GLME606 Modélisation Mathématique en Mécanique TP 5 Problèmes elliptiques

On s'intéresse à la résolution d'un problème elliptique avec des conditions de Dirichlet sur le bord. On considère un domaine rectangulaire Ω dont le bord sera noté $\partial\Omega$.

Équation de Poisson

Le modèle est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $\triangle$ désigne l'opérateur laplacien en 2D : $\triangle u(x,y) = u_{,xx} + u_{,yy}$

Travail à faire

On suppose que la fonction f est donnée par $f(x,y) = sin(\frac{\pi}{3}x)sin(\frac{\pi}{3}y)$ et que : $\Omega = [0;6]\times[0;6]$.

- Résoudre le problème (1) analytiquement.
- Résoudre le problème numériquement. Pour cela on utilise un schéma de discrétisation différences finies pour approcher le problème aux dérivées partielles. Il vous est demandé de récupérer les différents scripts Matlab, de préciser le schéma adopté pour la résolution et d'apporter les modifications nécessaires.
- Comparaison et commentaires.

Équation de Laplace

Pour cette partie, on considère le cas des conditions de Dirichlet non homogènes :

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u(0,y) = u(6,y) = u(x,0) = 0, u(x,6) = sin(\frac{2\pi}{3}x) \end{cases} \tag{2}$$

Travail à faire

- Rappeler la solution analytique.
- Expliquer comment on peut modifier les codes précédents pour obtenir la solution numérique.
- Comparaison et commentaires.