

Département de Génie Biologique

Cours de Métrologie

1^{ère} année

Jean-Michel MARTINEZ

Table des matières

[a4paper,12pt]report [français]babel [T1]fontenc ae graphicx fancyhdr here placeins am-
ssymb epstopdf times,amsmath,amsfonts [applemac]inputenc

Département de Génie Biologique

Cours de métrologie

1^{ère} année

Jean-Michel MARTINEZ

Table des matières

Chapitre 1

Introduction à la métrologie

1.1 Introduction

Les notions qui vont être exposées ici doivent être considérées comme la base de tout travail expérimental. Une manipulation conduit à la détermination de valeurs numériques attachées à un objet physique. Ainsi que nous le verrons ci-après, de multiples causes se conjuguent pour assurer que les conditions expérimentales de détermination d'une même grandeur ne sont jamais rigoureusement identiques d'une mesure à l'autre. Il en résulte que la valeur numérique attachée à cette détermination varie d'une mesure à l'autre. Une conséquence importante, sur le plan pratique, est qu'une mesure isolée n'a aucune signification. Chaque détermination doit être effectuée à l'aide d'un ensemble de mesures.

L'expérience montre, heureusement que les différentes mesures se regroupent au voisinage d'une valeur unique. Nous pourrions alors caractériser une détermination par deux nombres :

- Une valeur moyenne, autour de laquelle se regroupent les résultats de mesures.
- Une incertitude qui traduit la dispersion des résultats de mesures autour de cette valeur moyenne. Nous verrons plus loin comment déterminer pratiquement ces deux nombres.

1.2 Les sources d'incertitudes

La tradition veut que l'on désigne sous le nom d'erreur ou, plus précisément, d'incertitude, toute différence entre le résultat effectif d'une mesure, et le résultat théorique que l'on obtiendrait avec des appareils et un expérimentateur parfait. Suivant l'usage, nous envisageons deux grandes catégories d'incertitudes.

1.2.1 Incertitudes systématiques

Ce sont des erreurs qui se répètent, identiques à elles-mêmes, d'une mesure à l'autre. Leur provenance est assez variée, mais peut, dans la plupart des cas, s'inscrire sous trois rubriques principales.

1.2.1.1 Fautes de manipulation

Il s'agit d'erreurs dues à l'inattention ou à la maladresse de l'opérateur : erreur de lecture, inversion de chiffres en notant un résultat, mélange d'échantillons etc... Elles peuvent être détectées en effectuant plusieurs fois la même mesure, et en la faisant effectuer par un autre expérimentateur ; c'est en partie pour cette raison que les étudiants sont "binômés". Elles se traduisent en général par des différences marquées dans les résultats , ce qui suffit à les détecter.

1.2.1.2 Incertitudes dues à la méthode

Il s'agit, cette fois, d'erreurs dues à la méthode, indépendamment de l'adresse ou de l'attention de l'observateur. Nous pouvons citer à titre d'exemple :

- Ne pas plonger complètement un thermomètre dans le système dont on mesure la température,
- Ne pas tenir compte de la poussée d'Archimède lors de mesures de densité par la méthode du flacon,
- Repérer les oscillations d'un pendule au point d'inversion de la vitesse et non au passage par la position d'équilibre,
- Ne pas placer un prisme au minimum de déviation pour des mesures d'indice ou de longueur d'onde, etc...

1.2.1.3 Incertitudes dues aux appareils

Il s'agit d'erreurs introduites par les appareils utilisés :

- Défaut d'étalonnage
- Défaut de calibrage : ampèremètre dont la position de l'aiguille en l'absence de courant ne coïncide pas avec le "zéro" de la graduation.
- Etc...

Toutes ces erreurs peuvent, en principe, être éliminées par une étude critique de la méthode et des appareils, ainsi que par la comparaison des résultats obtenus à l'aide de méthodes et d'appareils différents.

1.2.2 Incertitudes accidentelles

Ces erreurs n'agissent pas systématiquement dans le même sens. Elles proviennent de facteurs sur lesquels l'opérateur n'a que peu (voire pas du tout) de contrôle. On peut les rattacher à deux types, sans que cette classification soit absolue.

1.2.2.1 Incertitude des appareils

Les erreurs précédemment définies (cf. 1.2.1.3) sont des erreurs de réglage. Celles-ci sont dues au manque de précision de l'appareil. Assez schématiquement, on peut dire que la grandeur à mesurer est bien définie, mais que l'appareil est de qualité moyenne ou médiocre. C'est le cas de la plupart des manipulations d'étudiants et aussi de beaucoup de mesures industrielles. Le manque de précision peut être dû :

- A l'écart entre les graduations : règle graduée en mm, masse marquée, boîte de résistance à valeurs fixes...
- Au manque de sensibilité de l'appareil détecteur, : galvanomètre ou balance peu sensible...
- A l'étalonnage de l'appareil de mesure, "classe" d'un ampèremètre, précision d'une boîte de résistance, etc...

1.2.2.2 Incertitudes aléatoires

Ces erreurs correspondent en quelques sorte au problème inverse du précédent : la précision de la mesure n'est pas limitée par l'appareil de mesures, mais par la définition même de la grandeur à mesurer.

- Celle-ci peut être intrinsèquement mal définie : trait trop gros, image optique floue, etc...
- Elle peut être bien définie, mais fluctuante par nature : émission de particules par un corps radioactif...

1.3 Détermination des incertitudes

Le but du calcul d'incertitude est d'apprécier l'importance des erreurs accidentelles, les erreurs systématiques étant supposées éliminées. En fait, il en subsiste toujours un résidu qui n'a pas été décelé, mais nous admettrons que ce résidu est négligeable, et nous n'en tiendrons pas compte pour le moment.

La plupart des résultats expérimentaux s'obtiennent en deux étapes : les indications des appareils conduisent à des nombres qui sont ensuite transformés à l'aide d'expressions mathématiques pour conduire au résultat cherché.

Un exemple simple est fourni par la mesure d'un indice de réfraction à l'aide d'un goniomètre. Les lectures de positions de la lunette fournissent des valeurs d'angles, et on en déduit l'indice par une relation bien connue. Le calcul d'erreur sera conduit en deux étapes :

- Au niveau des indications des appareils. Nous désignerons les valeurs numériques de ces indications par le terme : **Valeurs lues**
- Au niveau des expressions mathématiques. Nous désignerons les valeurs auxquelles conduit leur application par le terme : **Valeurs calculées**

1.3.1 Incertitudes sur les valeurs lues

Rappelons que nous supposons les erreurs systématiques éliminées, et les erreurs subsistantes, accidentelles. La plupart des erreurs, dans le cadre des manipulations d'étudiants étant des erreurs d'appareil, sont justiciables d'un calcul simplifié.

Ce n'est pas le cas des erreurs aléatoires dues au manque de définition ou aux fluctuations de la grandeur à mesurer. Celles-ci sont justiciables de calculs probabilistes, que nous exposons à part. La répétition des mesures d'une même grandeur, dans des conditions expérimentales aussi voisines que possible, conduit à un ensemble $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ de valeurs. On montre alors et nous admettrons :

- Que la meilleure estimation de la valeur numérique attachée à la grandeur étudiée est la moyenne des n valeurs lues
- Qu'une bonne estimation de l'erreur commise c'est à dire de la dispersion des valeurs lues autour de la moyenne précédente est fournie en fonction du nombre de valeurs mesurées

par : $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'écart max si le nombre de valeurs mesurées est inférieur à la dizaine,} \\ \text{l'écart moyen si le nombre de valeurs mesurées est inférieur à la centaine,} \\ \text{l'écart type si le nombre de valeurs mesurées est supérieur à la centaine.} \end{array} \right.$

RAPPELS MATHÉMATIQUES :

Nous utiliserons les notations des mathématiques statistiques, pour donner une définition de chacun des écarts défini ci-dessus. En notation statistique, une moyenne s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (1.3.1)$$

où n représente le nombre de mesures de l'échantillon A et le symbole $\sum_{i=1}^n$, la somme lorsque l'indice i varie de 1 jusqu'à n de chacune des mesure a_i de l'échantillon A . En utilisant cette notation, nous pouvons donner une définition concrète de chacun des écarts énoncé précédemment. De ce fait,

- l'écart maximum représente le maximum des écarts entre les valeurs mesurées et la moyenne de ces valeurs, soit :

$$\delta_{max} = \max |a_i - \bar{a}| \quad (1.3.2)$$

- l'écart moyen représente la moyenne des écarts entre les valeurs mesurées et la moyenne, suivant le relation :

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - \bar{a}|$$

- l'écart quadratique moyen représente une meilleure estimation que l'écart moyen de l'erreur pour un plus grand ensemble de valeurs mesurées :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i^2 - 2a_i\bar{a} + \bar{a}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2\frac{\bar{a}}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{n} \bar{a}^2 \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i^2 - \bar{a}^2) \\ \sigma^2 = \delta^2 &= \overline{a^2} - \bar{a}^2 \end{aligned}$$

- La variance est défini par la limite, lorsqu'on fait tendre le nombre de mesure vers l'infini, de l'écart quadratique

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n} \quad (1.3.3)$$

- L'écart type est défini à partir de la racine de la variance, ce qui peut être aussi estimé sous la forme :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n - 1}} \quad (1.3.4)$$

EXEMPLE : Lors de la mesure de la période d'un pendule, on a effectué 5 déterminations qui ont conduit aux valeurs lues suivantes (pour 20 oscillations)

$$a_1 = 23,2 \text{ s}$$

$$a_2 = 23,4 \text{ s}$$

$$a_3 = 22,9 \text{ s}$$

$$a_4 = 23,3 \text{ s}$$

$$a_5 = 23,0 \text{ s}$$

Nous adopterons pour estimation de la durée de 20 oscillations, la valeur :

$$\bar{a} = 23,16 \text{ s} \quad (1.3.5)$$

Les écarts sont calculées à partir de la valeur mesuré à laquelle on ote la valeur de la moyenne sur l'ensemble des mesures

$$\delta_1 = a_1 - \bar{a} = 0,04 \text{ s}$$

$$\delta_2 = a_2 - \bar{a} = 0,24 \text{ s}$$

$$\delta_3 = a_3 - \bar{a} = -0,26 \text{ s}$$

$$\delta_4 = a_4 - \bar{a} = 0,14 \text{ s}$$

$$\delta_5 = a_5 - \bar{a} = -0,16 \text{ s}$$

pour estimation de l'incertitude, la valeur la plus défavorable correspondant à l'écart maximum, soit :

$$\Delta a_{max} = 0,26 \text{ s (écart maximum)}$$

Si nous calculons, malgré le faible nombre de mesures, l'écart moyen et l'écart quadratique, nous trouvons les valeurs suivantes :

- Ecart moyen, $\Delta a_{moyen} = 0,168 s$
- Ecart quadratique, $\Delta a_{quadratique} = 0,185 s$

1.3.2 Incertitudes sur les valeurs calculées

Nous disposons d'un certain nombre de valeurs lues, a , b , c et des erreurs correspondantes Δa , Δb et Δc .

Nous nous limitons à trois valeurs pour la commodité de l'exposé. L'extension à un nombre quelconque est immédiate. La valeur calculée X s'en déduit par application de la relation :

$$X = f(a, b, c)$$

L'erreur ΔX se calcule à partir de Δa , Δb et Δc , par un calcul dont voici le principe. Nous avons déjà signalé que les valeurs de Δa , Δb et Δc , étaient petites devant les valeurs de a , b , c , respectivement. Il en résulte que la valeur de ΔX est elle aussi petite devant la valeur de X . Nous assimilons alors Δa , Δb et Δc , aux différentielles des variables a , b , c , et nous calculons ΔX à partir de la différentielle dX de la fonction $X = f(a, b, c)$. Un calcul classique, nous donne :

$$dX = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) da + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right) db + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right) dc \quad (1.3.6)$$

Nous avons bien dit : "nous calculons ΔX à partir de dX ". En effet, nous ne connaissons pas le sens des erreurs Δa , Δb , Δc . Il se peut qu'elles se compensent (cas favorable), il se peut aussi qu'elles jouent dans le même sens (défavorable). Nous devons, dans l'ignorance, choisir les cas défavorables, ce qui nous donnera une limite supérieure de ΔX . Ceci dit, le calcul d'incertitudes se conduit de la façon suivante :

Dans la relation (1.3.6)

- Nous remplaçons da , db , dc par les erreurs Δa , Δb , Δc
- Nous remplaçons $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}$ par leurs valeurs absolues.

On a alors :

$$\Delta X = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \Delta c \quad (1.3.7)$$

Nous pouvons à présent examiner quelques cas particuliers.

1.3.2.1 Somme

$$\begin{aligned}X &= a + b - c \\dX &= da + db - dc \\ \Delta X &= \Delta a + \Delta b + \Delta c\end{aligned}$$

On notera la disparition du signe -

$$\begin{aligned}X &= na \text{ (n constant)} \\dX &= nda \\ \Delta X &= n\Delta a\end{aligned}$$

1.3.2.2 Produit (ou quotient)

$$X = ab\frac{c}{d}$$

Pour ce type d'expression il vaut mieux utiliser les différentielles logarithmiques. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\ln X &= \ln\left(ab\frac{c}{g}\right) \\ \ln X &= \ln a + \ln b + \ln c - \ln g \\ \frac{dX}{X} &= \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c} - \frac{dg}{g} \\ \frac{\Delta X}{X} &= \left|\frac{1}{a}\right|\Delta a + \left|\frac{1}{b}\right|\Delta b + \left|\frac{1}{c}\right|\Delta c - \left|\frac{1}{g}\right|\Delta g\end{aligned}$$

1.3.2.3 Exemple de calcul d'incertitude sur la détermination de la pression P

Nous utilisons pour cela, l'équation d'état des gaz parfaits.

$$PV = nRT$$

Connaissant, les paramètres V , n et T , nous supposons aussi connues, les incertitudes ΔV , Δn , ΔT , nous cherchons à déterminer l'incertitude que nous avons sur le calcul de la pression P. En utilisant la méthode des différentielles logarithmiques, nous avons :

$$\ln P = \ln \left(\frac{nRT}{V} \right)$$

$$\ln P = \ln n + \ln R + \ln T - \ln V$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \quad \text{On remarquera que le terme } \frac{dR}{R} \text{ disparaît car R est une constante et } dR = 0$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \left| \frac{1}{n} \right| \Delta n + \left| \frac{1}{T} \right| \Delta n + \left| \frac{-1}{V} \right| \Delta V$$

$$\Delta P = \left| \frac{P}{n} \right| \Delta n + \left| \frac{P}{T} \right| \Delta n + \left| \frac{-P}{V} \right| \Delta V$$

$$\Delta P = \left| \frac{nRT}{nV} \right| \Delta n + \left| \frac{nRT}{TV} \right| \Delta n + \left| \frac{-nRT}{V^2} \right| \Delta V$$

$$\Delta P = \left| \frac{RT}{V} \right| \Delta n + \left| \frac{nR}{V} \right| \Delta n + \left| \frac{-nRT}{V^2} \right| \Delta V$$

1.3.2.4 Exemple de calcul d'incertitude sur la détermination de la distance focale f

Afin de déterminer l'erreur commise sur la mesure de la distance focale f, nous utiliserons, la méthode de Bessel comme technique de détermination de cette dernière. La relation utilisée est la suivante :

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4L} \quad \text{où les termes L et l sont des longueurs mesurées directement à l'aide d'une règle graduée}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial L} dL + \frac{\partial f}{\partial l} dl$$

$$df = \frac{L^2 + l^2}{4L^2} dL - \frac{l}{2L} dl$$

$$\Delta f = \left| \frac{L^2 + l^2}{4L^2} \right| \Delta L + \left| -\frac{l}{2L} \right| \Delta l$$

1.3.3 Incertitude absolue - Incertitude relative

Nous avons vu apparaître au cours des calculs, soit ΔX , soit $\frac{\Delta X}{X}$. La dispersion ΔX est usuellement dénommée incertitude absolue. On notera que c'est une grandeur de même nature que X. Elle s'exprimera donc dans les mêmes unités. Le rapport $\frac{\Delta X}{X}$ est quand à lui appelé incertitude relative. On notera que c'est un nombre pur, donc sans unité. Un usage assez répandu veut qu'on l'exprime en %. L'intérêt de l'incertitude relative est de faciliter la comparaison de deux mesures portant, soit sur des valeurs différentes d'une grandeur, soit sur des grandeurs différentes. Elle sera précieuse en particulier pour comparer les mérites respectifs de deux méthodes. Elle permet de définir un ordre de grandeur pour la précision de la méthode.

L'incertitude absolue, elle, "visualise" davantage la dispersion des résultats autour de la valeur moyenne. Elle sera donc particulièrement utile pour comparer les mesures des variations d'une même grandeur et pour apprécier la concordance de deux résultats. On pourra donc adopter la règle suivante, qui est loin d'être absolue :

- S'il s'agit de comparer deux méthodes, calculer l'incertitude relative ;
- S'il s'agit d'étudier les variations d'une même grandeur, ou d'apprécier l'égalité de deux résultats, calculer l'incertitude absolue.

EXEMPLE : mesure de la distance focale d'une lentille mince.

- Pour comparer les différentes méthodes de focométrie, l'incertitude relative est la plus commode ;
- Pour vérifier le théorème des convergences, l'incertitude absolue est à peu près indispensable.

1.3.4 Pratique du calcul d'incertitude

Pour résumer ce qui précède, tout calcul d'incertitude devra être conduit comme suit :

- a) Effectuer plusieurs fois la mesure de chacune des variables servant à déterminer la grandeur cherchée. Etant donné le temps imparti et le résidu d'erreurs systématiques, 5 à 6 mesures seront suffisantes.
- b) Déterminer pour chaque variable, la valeur moyenne et l'écart moyen ou l'écart maximum de la série de valeurs obtenues en a.

Dans certain cas, la valeur lue est fixée par l'appareil : résistance à plots, boîte de capacités à fiches....ou imposée : f.é.m. d'une pile étalon. On adoptera alors pour incertitude celle qui est indiquée par le fabricant, et qui est généralement portée par l'appareil sous l'indication "précision".

Un cas particulier est celui des appareils électriques dont la précision d'étalonnage (ou "classe") dépend du calibre choisi. Cette classe est indiquée par le fabricant, sous forme d'un chiffre quelquefois précédé du symbole "courant continu" ou "courant alternatif". Les appareils utilisés sont en principe de classe 1,5 en courant continu et 2 en courant alternatif. Ceci signifie que la précision d'étalonnage, est de 1,5% du calibre choisi en courant continu et de 2% en courant alternatif.

Soit un voltmètre utilisé sur le calibre 15 volts pour mesurer une tension $U=6$ V.

$$\text{L'erreur absolue est } \Delta V = \frac{1,5 \times 15}{100} = 0,225 \text{ V.}$$

Il s'ajoute bien entendu l'erreur de lecture déterminée par l'écart maximum des lectures.

De même, soit un paramètre utilisé pour mesurer l'intensité $I=0,4$ A, en courant alternatif (classe

2). Si l'appareil est branché sur le calibre 1 A, l'erreur sera :

$$\Delta I = \frac{2 \times 1}{100} = 0,02 \text{ A.}$$

Par contre, s'il est branché sur les calibres 0,5 A, l'erreur ne sera plus que

$$\Delta I = \frac{2 \times 0,5}{100} = 0,01 \text{ A.}$$

Là encore il faut ajouter l'erreur de lecture.

On a donc intérêt à utiliser le calibre le plus faible possible, compatible avec la valeur à mesurer.

- c) A partir des valeurs moyennes et par application de la relation mathématique convenable, déterminer la valeur calculée de la grandeur cherchée.
- d) A partir des écarts moyens (ou maxima), déterminer l'incertitude sur la grandeur cherchée en effectuant un calcul d'incertitude.

Pour ceci :

- Différencier (de préférence, logarithmiquement) la relation mathématique,
- Regrouper les facteurs de la différentielle de chaque variable, en tenant compte de leurs signes.
- Une fois ce regroupement effectué, mais pas avant, remplacer les différentielles des variables par les incertitudes correspondantes et prendre la valeur absolue de chaque facteur. Calculer alors numériquement l'incertitude sur la valeur calculée de la grandeur cherchée.

1.4 Résultats

1.4.1 Expression des résultats

Chaque mesure doit se traduire par un résultat numérique, c'est à dire par un nombre. L'écriture de ce nombre devra tenir compte des erreurs de mesure. Exemple : on a mesuré la valeur d'une résistance et trouvé la valeur R_0 , avec une incertitude $\Delta R = 0,3 \Omega$. Cela signifie que la "vraie valeur" est comprise entre :

$$R_0 + 0,3 \Omega \text{ et } R_0 - 0,3 \Omega$$

Il est donc inutile d'adopter pour R_0 une expression numérique comportant plus d'un chiffre après la virgule, puisque nous sommes incapables de décider si les suivants ont une signification ou non. De façon générale, l'expression numérique d'un résultat sera limitée au chiffre sur lequel porte l'erreur.

Il en sera d'ailleurs de même de l'expression numérique de l'incertitude, qu'elle soit absolue ou relative. Compte tenu des approximations faites dans leur calcul, il est inutile de garder plus de deux chiffres significatifs. L'affichage d'un résultat suivra les règles suivantes :

EXEMPLE 1 : Lors du calcul d'une pression (en bar), le résultat conduit aux valeurs suivantes :

$$P = 1,013257897589 \text{ bar}$$

$$\Delta P = 0,045189561233 \text{ bar}$$

Le résultat définitif sera exprimé sous la forme :

$$P = 1,013 \text{ bar}$$

$$\Delta P = 0,046 \text{ bar}$$

ou de manière plus compacte :

$$P = 1,013 \pm 0,046 \text{ bar}$$

On se sert de l'incertitude pour déterminer le nombre de chiffres après la virgule à afficher dans le résultat. On considère deux chiffres significatifs, on élève arbitrairement le dernier chiffre significatif à l'unité supérieure et on affiche la valeur principale avec le même nombre de décimales que celui correspondant à l'incertitude.

EXEMPLE 2 : Supposons que les valeurs de la pression et son incertitude soient les suivantes :

$$P = 1,1 \text{ bar}$$

$$\Delta P = 0,045189561233 \text{ bar}$$

Le résultat définitif sera exprimé sous la forme :

$$P = 1,100 \text{ bar}$$

$$\Delta P = 0,046 \text{ bar}$$

ou de manière plus compacte :

$$P = 1,100 \pm 0,046 \text{ bar}$$

EXEMPLE 3 : Supposons maintenant que les valeurs de la pression et son incertitude soient les suivantes :

$$P = 1,013978421156 \text{ bar}$$

$$\Delta P = 0,045189561233 \text{ bar}$$

Le résultat définitif sera exprimé sous la forme :

$$P = 1,014 \text{ bar}$$

$$\Delta P = 0,046 \text{ bar}$$

ou de manière plus compacte :

$$P = 1,014 \pm 0,046 \text{ bar}$$

il est tout de même impératif de conserver toutes les décimales dans la calculatrice pour les calculs et de factoriser au maximum toutes les expressions.

1.4.2 Comparaison de résultats

La comparaison de plusieurs méthodes de mesure d'une même grandeur physique, ou la vérification d'une loi théorique reposent sur le calcul d'incertitudes. Il s'agit, dans tous les cas, de comparer entre elles plusieurs valeurs numériques, dont on pense à priori qu'elles seraient égales si les mesures étaient effectuées sans incertitudes.

EXEMPLE : On mesure les valeurs r_1 et r_2 de deux résistances R_1 et R_2 . On associe ensuite ces résistances en série, et l'on mesure la valeur r_3 de la résistance équivalente R_3 . Nous pouvons calculer à partir des lois d'Ohm, la valeur r'_3 de R_3 , soit :

$$r'_3 = r_1 + r_2$$

S'il n'y a pas d'incertitudes de mesures, les valeurs r_3 mesurée et r'_3 calculée sont égales. En fait, il n'en est pas ainsi et l'on observe qu'en général r'_3 est différente de r_3 .

Si nous pensons que la différence $r_3 - r'_3$ observée est due aux seules incertitudes de mesures, nous admettons que la relation (1.4.2) est vérifiée.

Si au contraire, nous pensons que cette différence n'est pas explicable par les seules incertitudes de mesure, nous devons analyser l'expérience, pour chercher si une erreur systématique n'est pas passée inaperçue.

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, la théorie statistique des erreurs permet de déterminer les chances pour que la différence observée soit due aux incertitudes de mesure. Nous allons indiquer des règles simplifiées, par rapport à celles qu'il conviendrait d'utiliser, mais qui permettent sans calculs numériques excessifs, d'avoir une idée de la façon d'opérer.

1.4.2.1 Comparaison de deux mesures

Soient $g_1 \pm \Delta g_1$ et $g_2 \pm \Delta g_2$ les valeurs d'une même grandeur. En général, l'une des valeurs provient d'une mesure directe, l'autre d'un calcul, mais il existe d'autres possibilités.

Nous faisons l'hypothèse que g_1 et g_2 ne diffèrent qu'en raison des incertitudes de mesure. S'il en est ainsi, la différence $g_1 - g_2$ doit être de l'ordre de grandeur des incertitudes Δg_1 et Δg_2 .

Nous adoptons la règle suivante :

- à partir de $g_1 \pm \Delta g_1$ et $g_2 \pm \Delta g_2$, calculer $|g_1 - g_2|$ et $\Delta g_1 + \Delta g_2$
- Si $|g_1 - g_2| \leq \Delta g_1 + \Delta g_2$ nous admettons que la différence $|g_1 - g_2|$ n'est due qu'aux incertitudes de mesure.

1.4.2.2 Comparaison de plusieurs mesures

Soient g_1, g_2, \dots, g_n les valeurs obtenues. Nous faisons à nouveau l'hypothèse que toutes ces valeurs sont en principe égales, et que les différences observées ne proviennent que des incertitudes de mesure. Nous calculons alors, la moyenne arithmétique $\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i$ et l'écart

$$\text{moyen } \Delta g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |g_i - \bar{g}|.$$

Nous adoptons les règles suivantes :

- Si toutes les valeurs observées g_1, g_2, \dots, g_n se trouvent dans l'intervalle $[g - 2\Delta g, g + 2\Delta g]$ nous admettons que les valeurs g_1, g_2, \dots, g_n sont effectivement égales, aux erreurs d'expérience près.
- S'il existe des valeurs situées hors de cet intervalle, les mesures correspondantes doivent être refaites après analyse de l'expérience correspondante.

REMARQUES : Dans les deux cas, nous avons posé comme hypothèse de départ l'égalité de principe des valeurs g_1, g_2, \dots, g_n , il faut que cette hypothèse soit justifiable.

EXEMPLE : On étudie la variation de l'intensité dans une résistance, selon la tension imposée à ses bornes. On obtient une série de valeurs I_1, I_2, \dots, I_n . Il n'est pas possible d'appliquer à cette série de valeurs, les résultats précédents, puisqu'elles sont différentes par hypothèses. En particulier, un calcul de moyenne et d'écart moyen n'aurait rigoureusement aucun sens.

Les règles précédentes n'ont, bien entendu, rien d'absolu. Il se peut qu'une erreur de mesure conduise à une valeur extérieure aux intervalles définis ci-dessus. Toutefois, on peut admettre que la probabilité en est suffisamment faible pour que l'on puisse écarter, ou du moins, regarder de plus près la mesure correspondante. Il faut se dire qu'aucun procédé ne permet d'avoir en ce domaine une certitude absolue, et que le risque de se tromper est inséparable de toute mesure physique.

1.5 Graphes

Les graphes sont des auxiliaires précieux du physicien, par la commodité qu'ils apportent à la comparaison d'un ensemble de mesures. Ils sont aussi un facteur important d'élimination des incertitudes fortuites, et, quelquefois de détection des incertitudes systématiques. Un graphe représente des résultats de mesures traduisant la variation d'une grandeur en fonction d'une variable. A l'échelle des mesures effectuées, cette variation est continue. On peut donc la traduire par une courbe régulière. Un graphe rassemblant ces résultats comporte donc :

- Des points "expérimentaux", résultats de mesures effectivement réalisées
- Une courbe régulière traduisant les variations de la grandeur en fonction du paramètre choisi.

Les mesures étant entachées d'erreurs, les points expérimentaux ne se répartissent pas, en général sur une courbe régulière. Il appartient au physicien de tracer cette courbe en passant "au mieux" près des points expérimentaux et dans les rectangles d'incertitudes construits autour de chacun de ces points, à partir des incertitudes mesurées ou calculées. Les indications qui vont suivre sont essentiellement pratiques et se bornent à la construction des graphes.

1.5.1 Identification des graphes

Elle devra comporter, dans tous les cas :

Un titre précisant la nature de la grandeur et du paramètre, ainsi qu'une identification de l'échantillon sur lequel ont porté les mesures.

EXEMPLE : Etalonnage d'un spectroscope à prisme à vision directe

- Sur l'axe des abscisses, on portera les graduations en Å
- Sur l'axe des ordonnées on portera $\lambda(\text{Å})$

Le cas échéant, toutes indications nécessaires à une bonne compréhension. En particulier lorsque plusieurs courbes sont portées sur le même graphe, chacune d'elles doit être identifiable sans ambiguïté possible par un lecteur n'ayant pas fait les mesures correspondantes.

1.5.2 Echelles

Elles matérialisent, sur les graphes, les valeurs numériques des grandeurs correspondantes. De même que la nature et l'unité des grandeurs, les échelles sont indispensables à la compréhension du graphe. Elles sont, en principe linéaires. Toutefois, il pourra être avantageux dans certains cas, d'utiliser des échelles non linéaires, quadratiques ou logarithmiques par exemple. Lorsque tel est le cas, on le précisera clairement sur le graphe.

Les échelles doivent être graduées dans l'unité choisie, pour la grandeur correspondante. En principe, on n'indique que des valeurs simples, les valeurs mesurées n'étant qu'exceptionnellement portées. Enfin, les échelles seront choisies de façon que les points expérimentaux ne soient ni trop serrés ni trop "éparpillés". Il est difficile ici de donner une règle générale ; c'est surtout une affaire de "coup d'oeil", le graphe étant, rappelons le, un document visuel. Signalons qu'il n'est pas toujours nécessaire de placer l'origine des échelles au point d'intersection des axes et qu'il est toujours possible d'extrapoler le graphe.

1.5.3 Points expérimentaux

Ils seront indiqués clairement, par un symbole lisible : croix, cercle, triangle, ...etc. On portera tous les points et on évitera les "lignes de rappel" allant des points aux axes de coordonnées.

Si le graphe est utilisé pour déterminer d'autres valeurs que les valeurs mesurées (graphe d'étalonnage), les points correspondants seront clairement différenciés des autres. Il est très utile de porter sur le graphe les incertitudes de mesure. Pour ceci on tracera de part et d'autre du point, des segments de droite de longueur égale aux incertitudes sur la grandeur et sur la variable (compte tenu des échelles), ce qui conduit à un rectangle d'incertitude.

1.5.4 Courbes

A chaque série de mesures correspond une courbe régulière passant "au milieu" des rectangles d'incertitudes, près des points expérimentaux. Il sera souvent avantageux d'effectuer un changement de variable tel que la courbe se transforme en une droite. Celle-ci sera alors tracée à la règle. Le tracé de cette courbe doit être aussi net que possible : une bonne technique consiste à faire plusieurs essais au crayon, puis à repasser le meilleur à l'encre, d'un trait fin.

Eviter en particulier l'emploi des stylos à pointe "feutre" qui donnent rarement des résultats satisfaisants. Une petite "astuce" pour apprécier la régularité de la courbe : l'observer sous incidence rasante c'est à dire en plaçant la feuille de papier au niveau de l'oeil. On n'oubliera pas, enfin, tous les avantages que peut apporter l'emploi de la couleur, sans pour autant transformer le graphe en un tableau non figuratif.

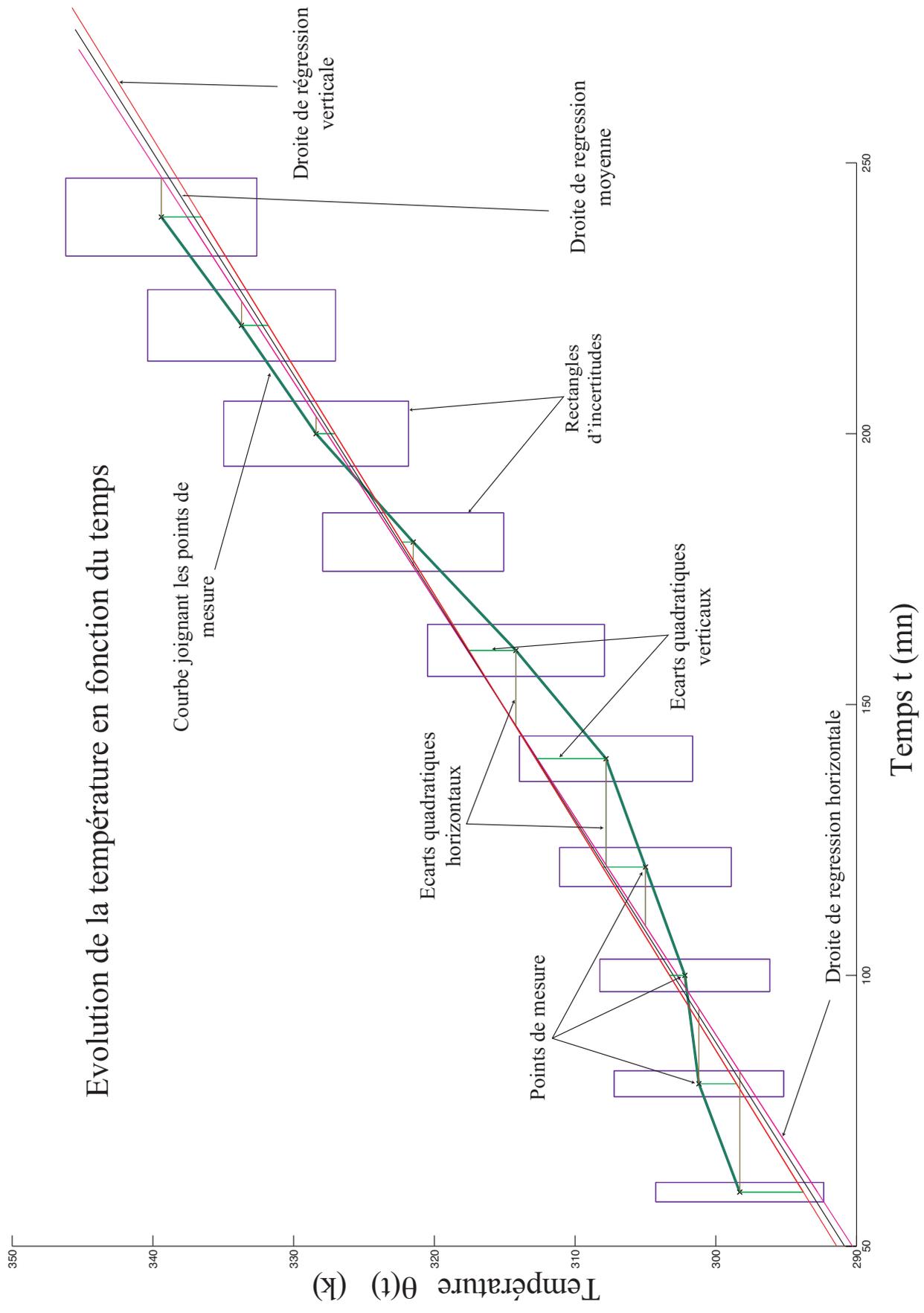
1.5.5 Courbes de régression linéaire

Supposons que nous ayons effectué des mesures de la température d'un corps soumis à une radiation infrarouge. Nous cherchons à déterminer la relation reliant l'accroissement de température $\theta(t)$ et le temps t . Nous obtenons le tableau de mesures suivant :

Nous associons à ce tableau de valeurs, une incertitude relative constante de 7% sur la mesure du temps et une incertitude relative constante de 8% sur la mesure de la température. Ceci nous permet de tracer les rectangles d'incertitudes que nous avons reportés sur la représentation graphique de la figure 1.1. De même, nous avons reportés les droites de régression linéaires. Ces droites correspondent à la meilleure position possible, minimisant la somme des écarts quadratiques en abscisse et en ordonnée.

Nous allons maintenant définir, la méthode permettant d'obtenir les équations de ces droites. La technique consiste à évaluer l'écart entre chacune des valeurs mesurées et une droite d'équa-

Evolution de la température en fonction du temps



Temps (s)	Température (K)
60	298,3
80	301,2
100	302,2
120	305,0
140	307,8
160	314,2
180	321,5
200	328,4
220	333,7
240	339,4

TABLE 1.1 : *Tableau de mesures de la température $\theta(t)$ en fonction du temps t*

tion $Y = aX + b$. Dans l'exemple que nous utilisons, cet écart s'écrira donc $\delta_i = \theta_i - aT_i + b$. S'il est calculé pour chaque valeur du tableau de mesures, cet écart sera tantôt positif ou tantôt négatif. Si nous effectuons la somme des écarts ainsi calculé, elle ne représente pas réellement une bonne information sur la façon de placer la droite sur les points, car cette somme peut selon les cas être négative, voire nulle. Nous préférons utiliser pour cela la somme quadratique, c'est à dire calculer l'écart précédemment défini, l'élever au carré et effectuer la somme des carrés des écarts, soit :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \theta_i - aT_i + b \\ \delta_i^2 &= [\theta_i - aT_i + b]^2 \\ \delta_i^2 &= [\theta_i^2 - 2\theta_i(aT_i + b) + (aT_i + b)^2] \\ \delta_i^2 &= [\theta_i^2 - 2a\theta_iT_i - 2b\theta_i + (aT_i + b)^2] \\ \delta_i^2 &= [\theta_i^2 - 2a\theta_iT_i - 2b\theta_i + a^2T_i^2 + 2aT_ib + b^2] \end{aligned}$$

Nous effectuons à présent la somme des écarts, soit :

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n \theta_i^2 - 2a \sum_{i=1}^n \theta_i T_i - 2b \sum_{i=1}^n \theta_i + a^2 \sum_{i=1}^n T_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n T_i + nb^2$$

En divisant le tout par n, il vient :

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i^2 - \frac{2a}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i T_i - \frac{2b}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i + \frac{a^2}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 + \frac{2ab}{n} \sum_{i=1}^n T_i + b^2$$

$$L = \bar{\delta}^2 = \bar{\theta}^2 - 2a\bar{\theta T} - 2b\bar{\theta} + a^2\bar{T}^2 + 2ab\bar{T} + b^2$$

Sachant que L(a,b) est une fonction des paramètres a et b, nous cherchons à minimiser cette fonction afin de déterminer les paramètres a et b de manière optimale, soit :

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -2\bar{\theta T} + 2a\bar{T}^2 + 2b\bar{T}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0$$

Ce qui revient à écrire :

$$-\bar{\theta T} + a\bar{T}^2 + b\bar{T} = 0$$

$$a\bar{T}^2 + b\bar{T} = \bar{\theta T}$$

De même, on peut calculer :

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -2\bar{\theta} + 2a\bar{T} + 2b$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0$$

Que l'on peut écrire aussi sous la forme :

$$-\bar{\theta} + a\bar{T} + b = 0$$

$$a\bar{T} + b = \bar{\theta}$$

Nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a\bar{T}^2 + b\bar{T} = \bar{\theta T} \\ a\bar{T} + b = \bar{\theta} \end{cases}$$

Que l'on résout facilement par substitution, en posant $b = \bar{\theta} - a\bar{T}$. L'équation de la première ligne s'écrit alors :

$$\begin{aligned} a\bar{T}^2 + \bar{\theta}\bar{T} - a\bar{T}^2 &= \bar{\theta}\bar{T} \\ a(\bar{T}^2 - \bar{T}^2) &= \bar{\theta}\bar{T} - \bar{\theta}\bar{T} \end{aligned}$$

De laquelle équation, on peut déduire :

$$a = \frac{\bar{\theta}\bar{T} - \bar{\theta}\bar{T}}{\bar{T}^2 - \bar{T}^2}$$

et

$$b = \bar{\theta} - \bar{T} \frac{\bar{\theta}\bar{T} - \bar{\theta}\bar{T}}{\bar{T}^2 - \bar{T}^2} \quad (1.5.1)$$

Ce que l'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} a &= \frac{cov(\theta, T)}{var(T)} \\ b &= \bar{\theta} - \bar{T} \frac{cov(\theta, T)}{var(T)} \end{aligned}$$

où $cov(\theta, T)$ représente la covariance des paramètres θ et T , et $var(T)$ la variance du paramètre T

En utilisant les données du tableau de valeurs, on trouve $a \simeq 0,2377$ et $b \simeq 279,5200$. Cependant, nous avons réalisé une régression linéaire en utilisant uniquement l'écart sur les ordonnées. Nous pouvons réaliser exactement la même étude en utilisant plutôt les écarts en abscisse. Ce qui revient à étudier la régression de la droite d'équation $T = c\theta + d$.

Il est inutile dès lors de refaire le calcul puisqu'il suffit de remplacer T par θ et inversement. on trouve donc les résultats suivant :

$$c = \frac{\bar{\theta}\bar{T} - \bar{\theta}\bar{T}}{\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^2}$$

et

$$d = \bar{T} - \bar{\theta} \frac{\bar{\theta}\bar{T} - \bar{\theta}\bar{T}}{\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^2} \quad (1.5.2)$$

Nous obtenons donc deux droites ayant comme pentes respectivement a et $\frac{1}{c}$. Les ordonnées à l'origine seront donné par b et $\frac{-d}{c}$.

Il est nécessaire à présent de savoir de manière objective, si la droite est une bonne représentation de la loi décrite par les points de mesures. Nous utilisons pour cela le coefficient de corrélation défini comme suit.

$$r = \sqrt{ac}$$

$$= \frac{(\overline{\theta T} - \bar{\theta} \bar{T})}{\sqrt{(\overline{T^2} - \bar{T}^2)(\overline{\theta^2} - \bar{\theta}^2)}}$$

Si le coefficient de corrélation est égal à 1 cela signifie que les points de mesure sont parfaitement alignés sur une droite d'équation $y = ax + b$. Si le coefficient est de 0.98, cela signifie que la droite n'est pas une représentation fidèle des points de mesures et qu'il faut utiliser une autre fonction. Si les valeurs de r contiennent au moins quatre 9 consécutif juste après la virgule on considèrera que la droite est une bonne approximation des points de mesures.

1.5.6 Linéarisation de fonctions

Le principe est de transformer une fonction donnée, en une droite. Un exemple simple revient à étudier la fonction de régression $f(x) = Be^{ax} = e^{ax+b}$. Il suffit pour cela de noter :

$$\begin{aligned}\Omega(x) &= \ln(f(x)) \\ &= \ln(Be^{ax}) \\ &= ax + \ln(B)\end{aligned}$$

En posant $b = \ln(B)$, il vient la relation suivante :

$$\Omega(x) = ax + b$$

Une application aux données du tableau 1.5.6 revient à utiliser une relation du type $\theta(T) = Be^{aT}$. pour cela nous allons remplacer les valeurs de θ par celles obtenues en utilisant la fonction logarithme (dans ce cas là). Le tableau précédemment utilisé devient :

Nous avons démontré plus haut que cela revient à étudier la régression linéaire de la fonction

T	θ	$\Omega = \ln \theta$
60	298,3	5,6981
80	301,2	5,7077
100	302,2	5,7110
120	305,0	5,7203
140	307,8	5,7294
160	314,2	5,7500
180	321,5	5,7730
200	328,4	5,7942
220	333,7	5,8102
240	339,4	5,8272

TABLE 1.2 : Tableau de mesures de la température $\Omega(T) = \ln[\theta(T)]$ en fonction du temps T

$\omega(T) = aT + b$ Nous obtenons donc les relations suivantes :

$$a = \frac{cov(\Omega, T)}{cov(T, T)} \quad (1.5.3)$$

$$b = \bar{\Omega} - \bar{T} \frac{cov(\Omega, T)}{cov(T, T)} \quad (1.5.4)$$

En remplaçant Ω par $\ln \theta$, il vient :

$$a = \frac{cov(\ln(\theta), T)}{cov(T, T)} \quad (1.5.5)$$

$$b = \overline{\ln \theta} - \bar{T} \frac{cov(\ln \theta, T)}{cov(T, T)} \quad (1.5.6)$$

Le graphe suivant représente plusieurs possibilités de linéarisation, les valeurs associées et les conséquences sur le calcul de la régression. On constate rapidement que la courbe en rouge est une meilleure approximation des points de mesures que la droite (pointillés bleu) et que l'exponentielle (pointillés vert). La linéarisation doit être utilisée aussi souvent que possible, afin de pouvoir évaluer au mieux la courbe de données.

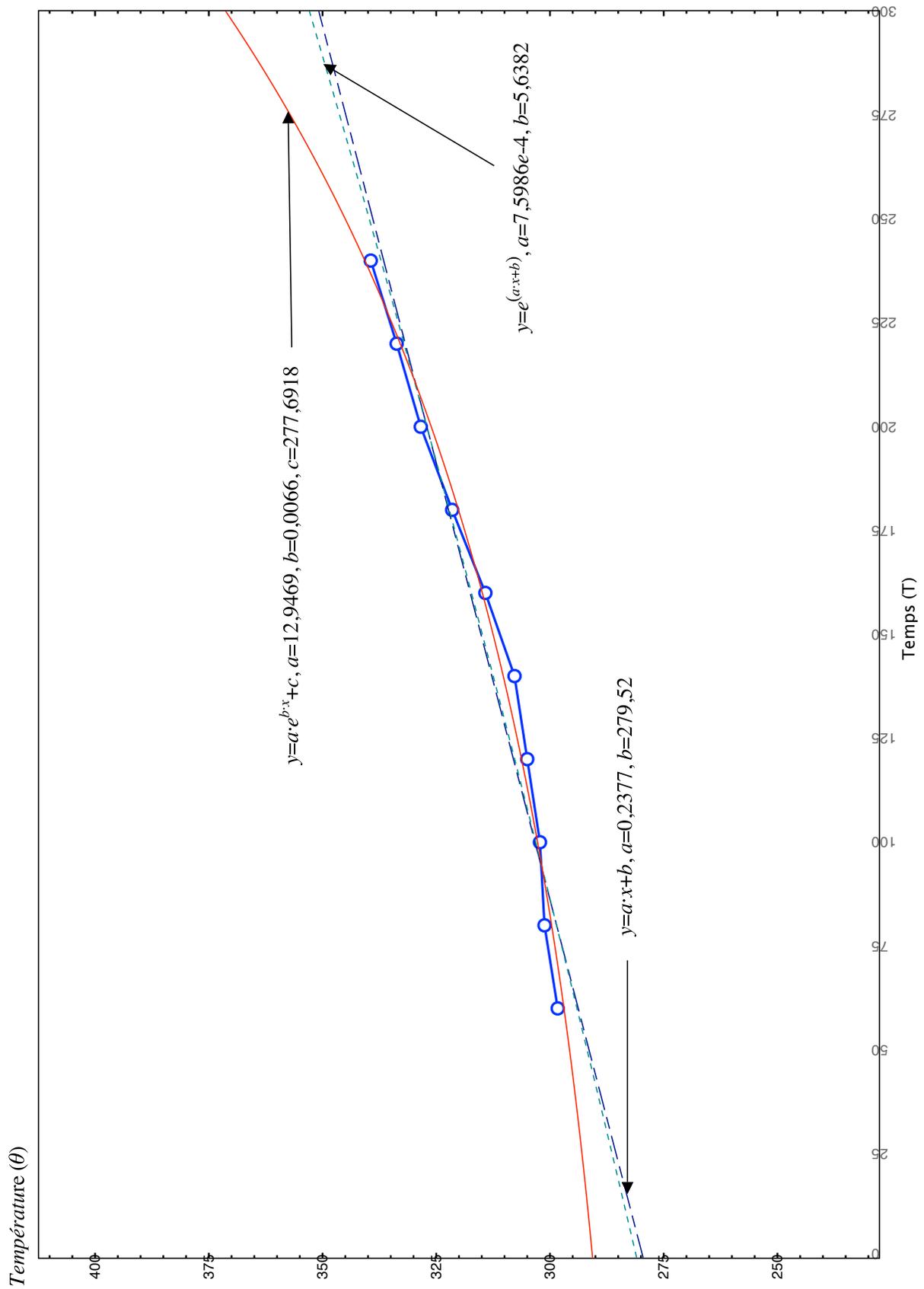


Fig. 1.2 : Représentation des points de mesure du tableau et des différentes regressions