Introcution au calcul formel avec Maple
L3 PMSI — Université de Rouen

Martin Rosalie

Table des matières

Introduction

Maple est un logiciel de calcul formel ; ce dernier est défini, selon Wikipedia, comme suit :

> *« Le calcul formel un procédé de transformation d'expressions mathématiques. Les objets de ce calcul ne plus des variables de l'expression mathématique, mais les opérations elles-mêmes. On y oppose généralement l'évaluation. »*

L'évaluation fait référence à tous les langages de programmation (`C`, `C++`, `Fortran`, ...) où des variables sont déclarées avec des valeurs affectées à ces variables. Ensuite, des calculs *numériques* sont effectués et le résultat se présente sous forme numérique avec un nombre limité de décimales. La portion de code `Fortran` suivante :

```
real a = 1.0/3.0
write(*,*) a
```

donne le résultat $\frac{1}{3} \simeq$ `3.3333333e-1` avec une précision à 8 chiffres significatifs.

L'idée principale du calcul formel est de faire des calculs *exacts*, sans approximation, et pour cela ce sont des expressions avec des variables, qui ne contiennent pas de valeur, qui sont manipulées comme étant des symboles. La notation anglo-saxonne du calcul formel : *symbolic computation* est plus explicite.

Remarque : Le calcul formel ne remplace pas le calcul numérique et inversement : ce sont deux façons d'utiliser les capacités de l'ordinateur pour résoudre des problèmes. Le calcul formel peut permettre de construire des formules qui seront par la suite utilisées dans des programmes numériques.

Pourquoi utiliser Maple ?

La partie calcul formel de Maple permet de

— avoir des réponses rapides sur des calculs élémentaires (calcul de dérivées, trouver les racines d'un polynômes, résoudre une équations différentielles, ...) ;
— résoudre des problèmes mathématiques plus complexes. Par exemple, pour l'algèbre linéaire, réaliser le calcul du déterminant d'une matrice, de ses valeurs propres, ... ;
— faire de la programmation sur les expressions mathématiques : programmation de suites, ...

Ce outil permet néanmoins de faire des applications numériques (même si ce n'est pas l'objectif principal) comme :

— évaluer des expressions mathématiques ;
— réaliser des graphiques en deux et trois dimensions ;
— appliquer des méthodes numériques de résolutions de problèmes.

Comment utiliser Maple ?

Maple, c'est comme une grande feuille de brouillon où l'on peut modifier les calculs théoriques que l'on a fait, changer des valeurs et regarder le résultat numérique pour expérimenter les mathématiques. C'est ce que nous allons apprendre tout au long de ce cours ...

Ces cours, travaux dirigés et travaux pratiques sont construits à partir des cours des années précédentes de Gilles Martel et des ouvrages suivants :

— Introduction to Maple
— Math et Maple

2.1 Interface

Dans la fenêtre de calcul il y a deux environnements de travail (Fig. 1) :

— Celui où l'on écrit du texte, il est possible de décrire les travail et pour cela d'utiliser tous les éléments de mise en forme de texte de n'importe quel éditeur de texte WYSIWYG ;

— Celui où l'on fait des mathématiques, nommé *noyau*. Il est facile à reconnaître car il apparaît avec le < et un crochet. Les environnements mathématiques sont numérotés pour faire références à un noyau précis. Pour continuer à faire des calculs dans le même noyau, il faut faire **Shift + Entrée**. La touche **Entrée** permet de faire un nouveau noyau.

Ma feuille de calculs

Les premiers calculs

Je vais faire mes premiers calculs.

> $2+8;$

$$10 \qquad (1)$$

> $\frac{3}{7}+\frac{8}{7};$

$$\frac{11}{7} \qquad (2)$$

>

FIGURE 1 – Exemple d'une feuille de calculs avec du texte et des mathématiques dans les deux environnements.

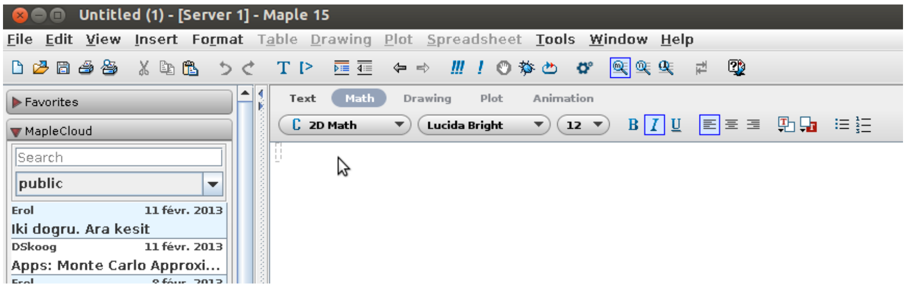

FIGURE 2 – Interface du logiciel.

Enfin, l'utilisation des *sections* permet de regrouper des morceaux de calculs.

En cas de besoin, si vous ne comprenez pas une commande où la façon dont elle fonctionne, utiliser l'aide

```
> help(eigenvalues)
```

pour avoir de l'aide sur la fonction *eigenvalues* qui donne les valeurs propres d'une matrice.

2.2 Syntaxe

Règles essentielles Tout programme Maple commence par la commande `restart` ; cela permet de réinitialiser toutes les variables lorsque la feuille est recalculée depuis le départ avec **Edit** → **Execute** → **Worksheet** ou l'icône *!!!*.

Pour afficher un résultat, il faut terminer la ligne par un « **;** », dans le cas contraire, terminer une instruction par « **:** » suffit. Il est nécessaire de nommer toutes les variables en utilisant des noms de plus de deux caractères, de préférence, explicites. Il ne faut pas hésiter à utiliser les lettres grecques disponibles. Des caractères sont réservés :

— I permet l'écriture des nombres complexes ;

— é, è, à, les espaces, =, @, &, ˆ, … ne sont pas autorisés pour les noms de variables ;

— le caractère « **_** » permet d'écrire des noms de variables indicées (par exemple P_{air}). Attention, l'objet est alors considéré comme un tableau indicé.

Le logiciel fait la distinction entre les majuscules et les minuscules : $f(x) \neq F(x)$.

Il est aussi possible d'ajouter des commentaires aux instructions pour aider à la compréhension des calculs ; pour cela, après une instruction, le caractère « # » indique que le texte qui suit est considéré comme des commentaires.

```
> Var_A := 3; # affiche le résultat de l'instruction
> Var_B := 4: # n'affiche pas le résultat de l'instruction
```

Raccourcis claviers La liste des raccourcis clavier est disponible sur le site internet :
`http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=worksheet%2fdocumenting%2f2DMathShortcutKeys.`
Voici quelques exemples de raccourcis pratiques :

- **Ctrl** + **Shift** + **Space** ou **Echap** permet de compléter une commande ou un symbole ;
- **Ctrl** + **Shift** + **R** permet d'ajouter des colonnes aux matrices ou des lignes aux fonctions par morceaux ;
- **Ctrl** + **Shift** + **G** permet d'écrire des lettres grecques.
- **Ctrl** + **L** permet de faire référence à une équation.
- **Ctrl** + **Suppr** permet de supprimer une ligne.

2.3 Fonctions

Une fonction se déclare de la manière suivante : d'abord son *nom* puis les *variables* et enfin l'*expression*.

```
> nom := (variable1,variable2) -> variable1 + variable2 # expression qui ajoute les deux variables
> eval(nom(x,y),{x=2,y=3})
```

Il est possible de composer des fonctions à l'aide du caractère @. En effet $f \circ f$ se traduit par `(f@f)(x)`.

Fonctions par morceaux L'instruction `piecewise` permet de déclarer des fonctions par morceaux.

> $\mathit{piecewise}\left(x = 0,\ 1,\ \dfrac{\sin(x)}{x}\right)$

$$\begin{cases} 1 & x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \mathit{otherwise} \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

>

2.4 Polynômes

Voici la liste des expressions utilisées en TD :

- `expand`
- `convert`
- `combine`
- `simplify`
- `normal`

2.5 Résolution d'équations

La déclaration d'une équation se fait de la manière suivante

```
> nom := membreDeGauche = membreDeDroite # Déclaration d'une équation
```

Les commandes `rhs`, respectivement `lhs`, permettent d'obtenir le membre de droite, respectivement de gauche, d'une équation. Enfin une équation est résoule avec l'instruction `solve`.

2.6 Groupe d'éléments

Suite Une suite est un ensemble d'expressions. Une suite peut être créée car plusieurs solutions existent pour une même équation, directement par l'utilisateur pour obtenir une séquence de nombres ou de noms. Une suite se déclare avec des « , » pour séparer chaque élément. Pour accéder au $k^{\text{ième}}$ élément d'une suite, il suffit de taper

```
> laSuite := a,b,c,d:
> laSuite[1]; #donne le premier élément de cette suite
```

Ensemble Les *ensembles* sont des suites avec des propriétés supplémentaires : il est possible de faire des opérations ensemblistes :

- réunion de plusieurs ensembles avec `union` ;
- intersection de plusieurs ensembles `intersect` ;
- soustraction de deux ensembles avec `minus`.

La déclaration d'un *ensemble* se fait de la même façon qu'une suite avec en plus des « `{` » et « `}` » en délimiteur aux extrémités. C'est le cas lors de l'affichage du résultat d'un `solve`.

Liste Les *listes* sont des suites avec des propriétés supplémentaires : il est possible de boucler une fois arriver à la fin de la liste. Si la liste est de dimension n, le $-n^{\text{ième}}$ élément est le premier élément. Une *suite* se déclare avec des « `[` » et « `]` » en délimiteur aux extrémités.

Exemple de fonctionnement d'une liste

```
> liste := [e1, e2, e3] :
  liste[-3]; liste[-1]; liste[1]; liste[2];
                                  e1
                                  e3
                                  e1
                                  e2                    (1)
>
```

Calcul matriciel

Le calcul matriciel est possible avec la librairie `LinearAlgebra` et la commande qui permet d'appeler cette librairie est

```
> with(LinearAlgebra);
```

ce qui permet d'afficher toutes les nouvelles instructions que cette librairie rend possible.

3.1 Vecteurs et Matrices

Vecteur Un vecteur est un élément qui transforme un élément de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$; il s'agit d'un espace vectoriel. Il s'agit d'un déclacement dans un espace ; en physique, il permet de modéliser une force. Un vecteur se déclare comme suit :

```
vect_ligne1 := <x,y,z>;
vect_ligne2 := Vector([x,y,z]);
vect_colonne1 := <x|y|z>;
vect_colonne2 := Vector[row]([x,y,z]);
```

Matrice Une matrice est une application linéaire entre deux espaces vectoriel. Par exemple une rotation peut être effectuée à l'aide d'une matrice de Givens. Les matrices sont aussi utilisées pour faire les résolutions de systèmes d'équations linéaires $A \cdot x = b$. Elles se déclarent comme suit :

```
mat_A := <<a,b,c>|<d,e,f>|<g,h,i>>;
mat_B := Matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);
```

Les matrices ont de multiples formes (symétriques, diagonales) à partir desquelles il est possible de construire la matrice en utilisant l'instruction `Matrix` avec des options.

Remarque : Certaines opérations donnent des résultats sous forme de matrices colonne ou des matrices ligne. Les fonctions `whattype` et `convert` sont utiles pour transformer les objets manipulés sous le bon format.

```
> whattype(v1)
                  Matrix
> v1:=convert(v1,Vector)
```

3.2 Opérations

Opération de base Il est possible d'ajouter deux vecteurs avec l'opérateur « + », et de multiplier un vecteur par un scalaire avec l'opérateur « * ». Au niveau du calcul matriciel, la somme de deux matrices peut s'effectuer avec l'opérateur « + », et la multiplication de matrice avec soit un vecteur, soit une matrice, soit un scalaire, se fait avec l'instruction `Multiply`.

Propriétés d'une matrice Toutes les informations relatives à une matrice peuvent être calculées
- Trace : `Trace` ;
- Rang : `Rank` ;
- Déterminant : `Determinant` ;
- Valeurs propres : `Eigenvalues`.

Inversion de matrices Il existe plusieurs méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires : $A \cdot x = b$: `LeastSquares`, `LinearSolve`, ... Elles sont numériques mais peuvent aussi être algébriques.

Équations différentielles ordinaires

La proportion de carbone 14 dans les êtres vivants est constante. Après la mort, elle diminue de $\frac{1}{8000}$ par an. L'équation traduisant ce phénomène est

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{8000}x(t) = 0 \tag{1}$$

avec $x(t)$ une fonction qui dépend du temps exprimé en années.

4.1 Equation différentielle linéaire à coefficients constants

Il s'agit d'une équation composée de différentes instructions dont la forme générale est la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + k_1 x(t) = a \tag{2}$$

et qui se traduit par l'instruction suivante

```
> equation := diff(x(t),t) + k_1 * x(t) = a
```

La résolution se fait en utilisant l'instruction `dsolve` qui prend en paramètre l'équation et la fonction à déterminer ; le résultat est la forme générale de l'équation. Il existe une infinité de solution, c'est la raison pour laquelle la solution dépend d'une constante.

```
> dsolve(equation,x(t))
```

Condition initiale Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + k_1 x(t) = a \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

a une unique solution. L'instruction `dsolve` peut prendre en paramètre les conditions initiales de l'équation.

4.2 Système d'équation différentielles couplées linéaires à coefficients constant

Il est possible de résoudre les systèmes de ce type

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = k_1 x(t) + k_2 y(t) + a \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = k_3 x(t) + k_4 y(t) + b \end{cases} \tag{4}$$

toujours avec l'instruction `dsolve`, avec non plus une équation, mais un système, différentes options peuvent être utiles comme `numeric`, `piecewize`, ... chacune étant adaptée au type de l'équation ou à ses particularités.

4.3 Système d'équation différentielles non linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t), y(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = g(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{5}$$

avec f et g des fonctions non linéaires qui dépendent de $x(t)$ et de $y(t)$. Résolution formelle n'est possible que dans certains cas et pour y pallier, des méthodes numériques sont utilisées : méthode de Runge Kutta 4. Pour cela des outils sont mis à disposition dans la librairie `DEtools` : `DEplot`, `phaseportrait`, ...

4.4 Équations différentielles d'ordre supérieur

Dans le cas d'équation différentielles d'ordre suppérieur, il est toujours possible de se ramener à un système d'équations différentielles d'ordre 1. L'équation différentielle introduite par Malasoma

$$\dddot{x} = -\alpha\ddot{x} + x\dot{x}^2 - x \tag{6}$$

peut être réécrite sous la forme d'un système d'équations différentielles en considérant chaque dérivée comme une nouvelle variable.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z + xy^2 - x. \end{cases} \tag{7}$$

Il est alors possible d'utiliser tous les outils présentés pour l'ordre 1.

Intégration

5.1 Primitives

Si les bornes de l'intégration ne sont pas spécifiées, l'instruction `int` permet de déterminer une primitive d'une fonction.

```
> primitive := int(1/(x^5+1),x);
```

Il est possible d'obtenir le développement limité de l'intégrale à l'aide de la commande `series`

```
> serie := series(primitive,x,10)
```

5.2 Intégrale avec des bornes

Les intégrales de la forme

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

peuvent être résolue à l'aide de l'instruction `int` : il suffit de donner l'intervalle sur la variable à intégrer.

```
> primitive := int(1/(x^5+1),x=1..8);
```

Si les bornes sont finies, il s'agit d'intégrale définies, sinon, il s'agit d'intégrale impropres.

5.3 Intégrales multiples

Pour calculer des intégrales multiples, il suffit de répéter successivement l'instruction `int`.

Le calcul d'intégrale de manière numérique : cf cours Thibault

— Méthode des rectangles

— Méthode des trapèzes

— Méthode de Simpson

Il est important de faire attention aux bornes et il est possible de contraindre le logiciel dans le domaine des réels.

24 janvier 2013	**TD1**	L3 PMSI Mécanique

Dans un environnement de texte, indiquer qu'il s'agit du premier TD et enregistrer le fichier sous `nom_TD1.mw`. Penser à décrire les opérations et répondre aux questions en changeant d'environnement. N'hésiter pas à mettre des commentaires explicites pour savoir ce qu'il se passe dans la feuille de calculs. Penser à mettre tous les résultats d'une question dans un même noyau.

Exercice 1.1 Calculs simples

1. Calculer $2+8$ et $\frac{3}{7}+\frac{8}{17}$ de manière exacte.
2. Calculer ces mêmes opérations, mais donner une valeur approchée décimale en utilisant `eval` puis `evalf`.
3. Changer la valeur par défaut du nombre de décimales à l'aide de la constante `Digits`.

```
> Digits:=20;
```

4. Un certain nombre de constantes mathématiques sont prédéfinies. Le nombre π s'écrit `Pi`. En utilisant les instructions `evalf` et `Digits`, afficher les 100 premières décimales de π.
5. Calculer $\pi^{\pi^{\pi}}$ avec 15 décimales.

Exercice 1.2 Factorisations implicites

1. Calculer $\sqrt{2\sqrt{19549}+286}$. Noter que Maple essaie toujours de simplifier le calcul symbolique par des factorisations. Calculer $\sqrt{2\sqrt{19549}\times 286}$. Ces factorisations ne sont pas toujours évidentes.
2. Calcul les nombres factoriels suivants : 6!, 51! et 234!
3. La décomposition en facteurs premiers se fait en utilisant l'instruction `ifactor`. Calculer la décomposition de 12, de 123 et de 56!

Exercice 1.3 Opérations sur les polynômes : développement et factorisation

Le développement d'une expression mathématique se fait avec l'instruction `expand` et la factorisation avec l'instruction `factor`.

1. Développer le polynôme $(3x^2+7x-4)^4$
2. Factoriser le polynôme $81x^8-432x^6+864x^4-768x^2+256$
3. Que donne le résultat de la ligne ? Expliquer.

```
> factor(expand((3*x^2+7*x-4)^2));
```

Exercice 1.4 Calcul différentiel et intégral

Le calcul de dérivée se fait avec l'instruction `diff` et celui des intégrales avec l'instruction `int`.

1. Calculer la dérivée de x^6 par rapport à x.
2. Calculer la dérivée seconde de x^6 par rapport à x.
3. Calculer la dérivée sixième de e^{-x^2} par rapport à x.
4. Calculer la dérivée seconde de $x^2\mathrm{e}^{-y^2}$ par rapport à y.
5. Calculer $\int t^5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ sous forme analytique et pour t allant de 0 à 1.
6. Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{1+t^8}\mathrm{d}t$

Exercice 1.5 Calcul formel ou numérique ?

Dans les exercices précédents, différencier les résultats qui relèvent du calcul formel de ceux qui relèvent du calcul numérique.

Exercice 1.6 Module graphique

Pour tracer une expression de type $y=f(x)$ dans un intervalle de x donné, on utilise l'instruction `plot` et pour une surface, on utilise `plot3d`.

1. Tracer la fonction $\cos(x)\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}$ pour $x\in[0;4]$
2. Tracer la surface $\sin(v)\sin(w)$ pour $v\in[-\pi;\pi]$ et pour $w\in[-\pi;\pi]$

Exercice 1.7 Modulation d'un signal

À partir d'un signal $e(t) = E\cos(wt)$ et d'une porteuse haute fréquence $p(t) = S\sin(w_0 t)$, un signal modulé est généré à l'aide d'une fonction $s(t)$. Le taux de modulation est défini par la relation $m = kE$; sachant que les valeurs des paramètres sont $E = 10$, $S = 1$, $\omega = 1$, $\omega_0 = 10$.

1. Tracer $e(t)$ et $p(t)$ sur deux graphiques différents.
2. Soit le signal modulé transmis $s(t) = S(1 + ke(t))\sin(\omega_0 t)$, porteur de l'information initiale. Tracer $s(t)$ pour $m = 0.1$, $m = 0.5$ et $m = 1.5$.
3. Soit le signal modulé transmis : $s(t) = \sin(\omega_0 t + ke(t))$, porteur de l'information initiale. Tracer $s(t)$ pour $m = 0.1$ et $m = 3$.

14 février 2013	**TD2**	L3 PMSI Mécanique

Exercice 2.1 Vecteurs et matrices

1. Déclarer un vecteur $v = (2\ 1)^t$ et représenter le dans le plan à partir du point d'origine $(0, 0)$, utiliser l'instruction `arrow` et ses options.
2. Déclarer une matrice de rotation, aussi appelée matrice Givens, qui permet de faire une rotation de $\frac{\pi}{4}$ à un vecteur.
3. Dans une suite, appliquer successivement cette rotation au vecteur v et au résultat successifs.
4. Tracer la suite de vecteurs.

Exercice 2.2 Résolution de systèmes linéaires

1. Déclarer la matrice A et les vecteurs b et c.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 11 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 8 & 11 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 29 \\ 15 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 29.1 \\ 14.9 \\ 30.1 \\ 23.9 \end{bmatrix} \tag{9}$$

2. Calculer le conditionnement de la matrice A ; qu'est ce que cela signifie ?
3. Résoudre le système d'équation $A \cdot x = b$ avec la méthode des moindres carrés.
4. Inverser la matrice A.
5. Calculer l'erreur entre la résolution par la méthode des moindres carrées et en utilisant les relations algébriques.
6. Résoudre le système d'équation $A \cdot x = c$ avec la méthode des moindres carrés.
7. Résoudre le système d'équation $A \cdot x = c$ avec l'option `hybrid` de la fonction `LinearSolve`.
8. Résoudre le système d'équation $A \cdot x = c$ avec l'option `SparseIterative` de la fonction `LinearSolve`.
9. Préciser laquelle des trois méthodes donne le meilleur résultat ?
10. Préciser, pour chaque question, si le calcul demandé relève du calcul formel ou du calcul numérique.
11. Affecter à λ_1 la première valeur propre de la matrice A.

Exercice 2.3 Plaque trouée, en traction simple

Répondre aux questions de la feuille en annexe sur une nouvelle feuille de calcul.

1. Trouver la matrice et le vecteur dont le produit donne le vecteur
2. Pour tracer des isolaveurs, utiliser la fonction `contourplot`. Préparer une sortie au format PDF avec les résultats demandés.

Exercice 3.1 Pendule simple sans frottement

Le mouvement d'un pendule simple sans frottement est caractérisé par l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (10)$$

où g est la gravité, l la longueur du fil auquel la masse est attachée et θ l'angle entre la verticale et le fil.

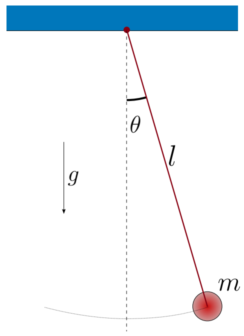

Figure 3 – Pendule simple (Source Wikipedia)

1. Déclarer l'équation différentielle du second ordre du mouvement de la masse.
2. Substituer $g = 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$ et $l = 1$ m par leurs valeurs numériques. Cette équation est elle linéaire ?

Calcul numérique Utilisation des outils numériques pour avoir la solution et expliquer la dynamique du système.

3. Tracer la solution $\theta(t)$ pour les conditions initiales

$$C : \begin{cases} \theta(0) = 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \end{cases} \text{ et } D : \begin{cases} \theta(0) = 2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

pour un pas de temps à 0,1 et des couleurs différentes pour les deux solutions. L'instruction `D(f)(0)=0` permet de donner la condition initiale de la dérivée première de la fonction f évaluée en 0.

4. Transformer cette équation en un système d'équations différentielles d'ordre 1, pour cela (dans une liste)
   — déclarer l'équation différentielle n°1 comme étant $v = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$;
   — déclarer l'équation différentielle n°2 en substituant $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ par v dans l'équation différentielle d'ordre 2.
5. Utiliser l'instruction `phaseportrait` pour tracer l'évolution des deux variables, non plus en fonction du temps, mais l'une en fonction de l'autre. Il s'agit d'un ensemble de trajectoires pour de nombreuses conditions initiales différentes. Utiliser l'instruction `seq` pour déclarer ces trois ensembles de conditions initiales

$$E : \begin{cases} \theta(0) = -5 \\ v(0) = [0, 10] \end{cases}, \; F : \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ v(0) = [0, 6] \end{cases} \text{ et } G : \begin{cases} \theta(0) = 5 \\ v(0) = [-10, 0] \end{cases}. \qquad (12)$$

Tracer le portrait de phase pour θ allant de -5 à 5, avec un pas de temps égal à 0,01. Utiliser l'option `arrows=none` pour n'avoir que les trajectoires.

6. Décrire le portrait de phases et faire le lien avec le mouvement du pendule pour de telles conditions initiales. En déduire quels sont les comportements possibles pour le pendule ?
7. Quel est l'avantage du portrait de phase par rapport au tracé de la question 3.

Calcul formel En l'absence d'outils numériques, il est possible d'avoir des informations sur la structure du portrait de phase.

8. Rechercher les points d'équilibre du système d'équation de la question 4. Un point d'équilibre est un point du système pour lequel ses dérivées sont nulles. Substituer les dérivées par des valeurs nulles dans le système d'équation de la question 4. Ajouter l'option `allsolutions` à l'appel de l'instruction `solve`.
9. Calculer la jacobienne du système écrit sous la forme standard de système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t), y(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = g(x(t), y(t)) \end{cases} \qquad (13)$$

Elle permet d'avoir une linéarisation au voisinage des points d'équilibre. Les trajectoires ont alors les mêmes allures que le système initial en ces points.

10. Calculer les vecteurs propres unités aux points d'équilibre et les tracer sur un graphique. Vérifier qu'il sont corrects en les comparant avec le champ de vecteurs obtenu numériquement.

Le compte-rendu sera à envoyer au format PDF par mail à l'adresse `martin.rosalie@etu.univ-rouen.fr`.

Exercice 1.1 Évaluation et substitution

1. Déclarer le polynôme $P = x^2 + x + 1$.
2. Déclarer le polynôme Q qui vaut P en remplaçant x par x^2, utiliser l'instruction `subs`. Évaluer P et Q pour la valeur $x = 4$.
3. Déclarer la fonction f_1 qui à x associe 1 si $x = 0$ et $\frac{\sin(x)}{x}$ sinon. Substituer x par 0. Évaluer cette fonction en $x = 0$.
4. Expliquer le comportement du logiciel pour la question précédente.
5. Résoudre $P = 0$ et $Q = 0$ et stocker les solutions respectives dans sol_P et sol_Q.
6. Trouver les solutions communes à ces deux équations.

Exercice 1.2 Série

1. Créer la liste d'éléments y^i pour i allant de 2 à 8, nommée $liste_1$ en utilisant l'instruction `seq`.
2. Définir la fonction de deux variables
$$f(n,x) = \frac{2\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(\pi m x)}{m}\right)}{\pi}$$
Utiliser l'instruction `sum`. Tracer $f(2,x)$ pour x allant de 0 à 4.
3. Tracer sur un même graphe les fonctions $f(i,x)$ pour i allant de 2 à 8.
4. Tracer sur un même graphe les fonctions $f(i,x)$ pour i allant de 18 à 26.
5. Vers quelle fonction la suite converge-t-elle ?

Exercice 1.3 Simplification

Maple dispose d'une simplification automatique pour les expressions. Il est toutefois quand même nécessaire de préciser parfois le type de simplification à travers une instruction spécifique. Les instructions pour réaliser cette tâche sont `expand`, `combine`, `simplify` et `convert`. Dans le cas où l'on doit développer un dénominateur d'une fraction rationnelle, on utilise l'instruction `normal` (avec l'option `expanded`).

1. Réaliser les exemples suivants qui permettent de préciser les conditions d'utilisation.

```
> expand(cos(x+y));   expand(exp(x+y)); expand(x^(y+z));
> combine(cos(x)*cos(y)-sin(x)*sin(y));
> combine(exp(x)*exp(y));
> combine( x^y *x^z );
> simplify(cos(x)^2+sin(x)^2);
> simplify(exp(x)*exp(y));
> simplify(x^y*x^z);
> convert(cos(x),exp); convert(exp(I*x),trig);
> normal( (f(x)^2-1)/(f(x)-1) );
```

2. En utilisant les fonctions ci-dessus simplifier les expressions suivantes :
$$\frac{(\exp(x) + x)}{(\exp(2x) + 2x\exp(x) + x^2)}, \quad \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - 4x + 4)^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{4}{2+\sqrt{2}} + \frac{4}{2-\sqrt{2}}. \tag{14}$$
3. Expliquer l'option `symbolic` dans l'opérateur : `simplify`.
4. Expliquer l'opérateur `normal`.
5. Sachant que $\coth(x) = \cosh(x)/\sinh(x)$, vérifier les expressions suivantes :

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(2x) + \sin(2y)}{\cos(2y) + \cos(2x)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1\pi\coth(\pi)}{2} - \frac{1}{2}, \quad \cos(x)^6 + \sin(x)^6 = 1 - 3\sin(x)^2\cos(x)^2 \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)^3} = -\frac{1\pi^3\coth(\pi)}{8} + \frac{1\pi^3\coth(\pi)^3}{8} - \frac{1}{2} - \frac{3\pi^2}{16} + \frac{3\pi^2\coth(\pi)^2}{16} + \frac{3\pi\coth(\pi)}{16} \tag{16}$$

Le compte-rendu sera à envoyer au format PDF par mail à l'adresse `martin.rosalie@etu.univ-rouen.fr`.

Exercice 2.1 Équation différentielle linéaire à coefficients constants

1. Déclarer l'équation différentielle linéaire suivante (penser à la nommer)

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + k_1 \cdot x(t) = a \tag{1}$$

2. En utilisant l'instruction `subs` pour remplacer les valeurs des constantes, donner la forme générale de la solution pour les valeurs $a = 0$ et $k_1 = 1/5$.
3. Donner la solution de l'équation pour la condition initiale $x(0) = 1$.

Exercice 2.2 Système d'équations différentielles linéaires

1. Déclarer le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -k_1 \cdot x(t) + k_2 \cdot y(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot y(t) \end{cases} \tag{2}$$

2. Déterminer la solution générale de ce système.
3. Déterminer la solution particulière de ce système pour la condition initiale $x(0) + y(0) = 1$.
4. En utilisant l'instruction `limits` (utiliser l'aide), et en supposant que les constantes k_1 et k_2 soient positives (utiliser l'option `assume(k_1>0,k_2<0)`), montrer que les solutions de ces équations tendent vers des valeurs indépendantes des conditions initiales.
5. En supposant $k_1 = 0,1$ et $k_2 = 0,4$ pour les valeurs des paramètres, $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$ pour les conditions initiales, tracer sur un même graphe $x(t)$ et $y(t)$ pour t allant de 0 à 10.

Exercice 2.3 Système d'équation différentielles non linéaire : le modèle proie-prédateur

On considère l'écosystème suivant : la population est constituée de proies (notées x), de prédateurs (notés y), de nourriture (notée a). Le taux de reproduction des proies est fixé par la quantité de nourriture, le taux de reproduction des prédateurs est fixé par le nombre de proies, et la difficulté (notée b) de les trouver. De plus les prédateurs meurent naturellement avec un taux fixé (noté c). En supposant que la nourriture est suffisamment abondante pour ne jamais diminuer, c'est-à-dire en la fixant comme constante et égale à a, ce système est représenté par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a \cdot x(t)(1 - y(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = y(t) - (b \cdot x(t) - c) \end{cases} \tag{3}$$

1. Déclarer les équations différentielles du modèle.
2. En utilisant `DEplot` avec les paramètres $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$, avec les deux conditions initiales différentes

$$A : \begin{cases} x(0) = 0,2 \\ y(0) = 1,2 \end{cases} \text{ et } B : \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0,7 \end{cases} \tag{4}$$

   tracer les deux solutions (A et B). La résolution se fait avec la méthode `rkf45`, pour un pas de temps (`stepsize`) de 0,1 et pour un temps allant de 0 à 30. (Penser à charger la librairie `DEtools`.)
3. Même question pour les paramètres $a = 1$, $b = 0.5$ et $c = 0.5$.
4. Même question pour les paramètres $a = 1$, $b = 0.3$ et $c = 1$.
5. Décrire l'évolution des populations à l'aide des graphiques tracés.

Exercice 2.4 Calcul formel ou numérique

Indiquer les questions du TP dont les réponses relèvent du calcul formel.

Exercice 3.1 Calcul formel d'intégrales

1. Calculer les primitives et les développements en série à l'ordre 10 des intégrales

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int x^3\ln(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

2. Calculer les intégrales définies suivantes

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

3. Tracer ces fonctions sur l'intervalle $[1:+\infty]$ et indiquer s'il est possible d'en calculer l'intégrale. Justifier.

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} \qquad \frac{x}{1+x^4} \qquad \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2} \tag{3}$$

4. Calcules les intégrales impropres suivantes, de manière exacte et approchée

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

5. Utiliser `assume` et calculer les intégrales suivantes

$$\text{avec } a>0 \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos^2(bx)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x+a)(x-1)}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$\text{avec } -1<a<1 \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{x}+b}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

6. Calculer les intégrales multiples suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+y)\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7}$$

Exercice 3.2 Magnétostatisme

En magnétostatisme, la loi d'Ampère nécessite de calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I_0 a^2}{\pi\left(\frac{a^2}{4}+x^2\right)\sqrt{2a^2+4x^2}}\,\mathrm{d}x\ . \tag{8}$$

Plus précisément cette intégrale permet de vérifier le théorème d'Ampère en intégrant le champ d'induction magnétique le long de l'axe d'un cadre métallique de côté a parcouru par un courant I_0 ; μ_0 est la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que cette intégrale vaut $\mu_0 I_0$.

1. Réinitialisez le noyau Maple.
2. Supposer que x est un réel (`real`) et que a est strictement positif.
3. Définissez l'intégrale sous le nom *integrale1*.

À ce stade, Maple ne sait pas évaluer cette intégrale. Pour simplifier le problème, on fait un changement de variables pour obtenir un facteur $\sqrt{1+u^2}$ au dénominateur.

4. Trouver le changement de variable et utiliser la procédure `changevar` qui fait partie de la librairie `Student` pour obtenir l'intégrale *integrale2* sous la forme voulue.
5. Simplifier le résultat.
6. Évaluer le résultat de cette simplification.
7. Conclure.

Exercice 3.3 Calcul numérique d'intégrales

Utiliser l'instruction `ApproximateInt` de la librairie `Student[Calculus1]` pour calculer les intégrales de la question 2 de l'exercice 1 de manière numérique et

— montrer l'influence du choix de la méthode employée (méthode des rectangles, méthode des trapèzes, méthode de Simpson) ;
— montrer l'influence du choix du nombre de partition.

11 avril 2013	**Examen de TP - Calcul formel**	L3 PMSI Mécanique

Le compte-rendu est à exporter au format PDF : le nom du fichier est `numeroanonymat.pdf`.

Exercice 4.1 Évaluation et substitution pour les polynômes

1. Déclarer le polynôme $P = x^2 + x + 1$.
2. Déclarer le polynôme Q qui vaut P en remplaçant x par x^2.
3. Évaluer P et Q pour la valeur $x = 3$.
4. Résoudre $P = 0$ et $Q = 0$ et stocker les solutions respectives dans `solP` et `solQ`.
5. Trouver les solutions communes à ces deux équations.
6. Déclarer la fonction f qui à x associe 1 si $x = 0$ et $\frac{P}{x}$ sinon. Substituer x par 0. Évaluer cette fonction en $x = 0$. Expliquer le comportement du logiciel.

Exercice 4.2 Système d'équations différentielles linéaires

1. Déclarer le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -a \cdot y(t) + b \cdot z(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = a \cdot y(t) - b \cdot z(t) \end{cases} \tag{1}$$

2. Déterminer la solution générale de ce système. Expliquer les nouveaux termes apparus dans la solution.
3. Déterminer la solution particulière de ce système pour la condition initiale $y(0) + z(0) = 1$.
4. En supposant que les constantes a et b soient positives, montrer que les solutions de ces équations tendent vers des valeurs indépendantes des conditions initiales.
5. En supposant $a = 0,2$ et $b = 0,3$ pour les valeurs des paramètres, $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$ pour les conditions initiales, tracer sur un même graphe, $y(t)$ et $z(t)$ pour t allant de 0 à 15.

Exercice 4.3 Calcul d'intégrales

1. Calculer les intégrales définies suivantes de manière exacte et à l'aide d'une méthode numérique.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

2. Calculer les intégrales impropres suivantes, de manière exacte et approchée. Avant de calculer, vérifier et justifier que cela est possible.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

Exercice 4.4 Résolution d'un système linéaire

1. Déclarer la matrice A et le vecteur b.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 11 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 8 & 11 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 29.1 \\ 14.9 \\ 30.1 \\ 23.9 \end{bmatrix} \tag{4}$$

2. Donner la définition et calculer le conditionnement de la matrice A. Que peut-on en déduire ?
3. Résoudre le système d'équation $A \cdot x = b$ avec la méthode des moindres carrés. Trouver une autre méthode numérique pour résoudre plus efficacement ce système ; justifier son emploi.
4. Inverser la matrice A et utiliser ce résultat pour résoudre le système $A \cdot x = b$.

Exercice 4.5 Calcul formel ou numérique ?

Indiquer, en justifiant, les questions du TP dont les réponses relèvent du calcul formel.