

# Gabarit d'un attracteur borné par une frontière toroïdale de genre 5

Martin Rosalie & Christophe Letellier

CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, Av de l'Université, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray  
Cedex, France

[martin.rosalie@coria.fr](mailto:martin.rosalie@coria.fr)

**Résumé.** La topologie des attracteurs chaotiques produits par des systèmes tridimensionnels peut être synthétisée à l'aide de gabarits. Si l'obtention de ceux-ci est courante pour des attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre 1, elle est déjà nettement plus délicate pour des attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre 3 comme l'attracteur de Lorenz. Nous proposons ici une brève présentation des développements d'une théorie des gabarits conduisant à une généralisation de la construction des gabarits d'attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre  $g > 2$ . Le cas explicite d'un attracteur « multispirale » borné par une frontière toroïdale de genre 5 est traité pour en illustrer le principe.

**Abstract.** The topology of chaotic attractors produced by tridimensional systems can be synthesized by a template, also named a branched manifold. If getting such a template is quite common for attractors bounded by genus-1 tori, it is far more difficult to extract a template for attractors bounded by a genus-3 bounding torus as exemplified by the Lorenz system. We here propose a brief presentation of some developments of a “template theory” leading to generalize the construction of template for attractors bounded by genus- $g$  bounding tori. The explicit case of a multispiral attractor bounded by a genus-5 torus is treated to evidence its principle.

## 1 Introduction

La caractérisation topologique des attracteurs chaotiques solutions de systèmes non linéaires déterministes est une technique puissante pour en comprendre l'architecture et les mécanismes dynamiques sous-jacents [1]. Les mécanismes de base ont déjà été identifiés et la topologie de nombreux attracteurs a déjà été caractérisée [1,2,3]. Les attracteurs chaotiques se classent selon le genre des frontières toroïdales qui les bornent [4] ; les plus simples étant bornés par un tore de genre 1 comme le système de Rössler [5]. Le système de Lorenz présente déjà quelques difficultés puisque borné par un tore de genre 3 [6]. La caractérisation des attracteurs bornés par un tore de genre supérieur à 3 requiert l'introduction de nouveaux concepts que nous décrirons brièvement en traitant un attracteur multispirale borné par une frontière toroïdale de genre 5.

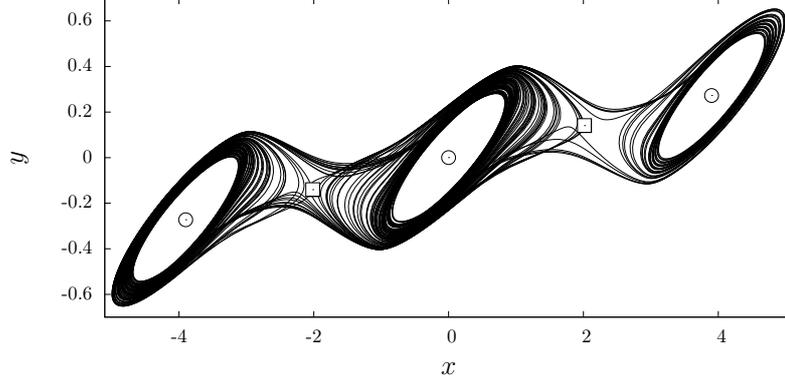
## 2 Attracteur multispirale

Les attracteurs multispiraux ont été introduits par Aziz-Alaoui [7]. Ce sont des attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre élevé ( $g \geq 3$ ). Parmi eux, nous avons choisi un attracteur borné par une frontière toroïdale de genre 5 et solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha [y - x - f_3(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta x - \gamma y \end{cases} \quad (1)$$

où

$$f_3(x) = \begin{cases} m_0 x + \operatorname{sgn}(x)\xi_0 & \text{si } |x| \leq s_0 \\ m_1 x + \operatorname{sgn}(x)(m_0 - m_1)s_0 & \text{si } s_0 \leq |x| \leq s_1 \\ m_2 x + \operatorname{sgn}(x)[(m_1 - m_2)s_1 + (m_0 - m_1)s_0] & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$



**Figure 1.** Attracteur multispirale solution du système (1) dans le plan  $x$ - $y$ . Le flot circule selon le sens horaire dans chacune des trois spirales. Les points singuliers sont également représentés par des  $\odot$  pour les foyers et par des  $\boxplus$  pour les cols. Valeurs des paramètres  $\alpha = 14, 6$ ,  $\beta = 12$ ,  $\gamma = 0, 9$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $s_0 = 1$ ,  $s_1 = 3$ ,  $m_0 = -5/7$ ,  $m_1 = -8/7$  et  $m_2 = -0, 7$ .

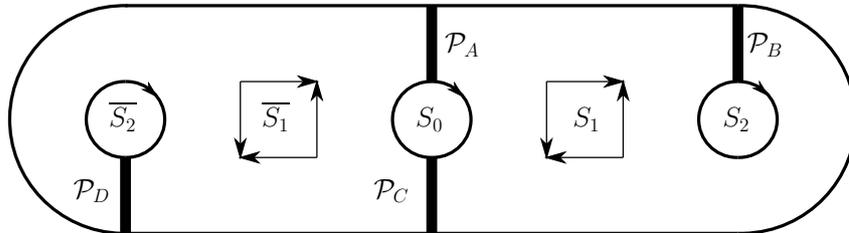
Ces équations différentielles sont du type de celles décrivant le circuit de Chua [8] dont la fonction linéaire par morceaux est modifiée de manière à engendrer de multiples spirales sur l'attracteur (Fig. 1).

Les équations du système (1) sont invariantes sous une symétrie centrale, c'est-à-dire que le système vérifie la relation  $\Gamma \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\Gamma \cdot \mathbf{x})$  où

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La symétrie centrale est d'ordre 2 puisque  $\Gamma^2 = \mathbb{I}$  où  $\mathbb{I}$  désigne l'identité. Nous désignerons par  $\bar{\zeta}$  une solution symétrique d'une solution  $\zeta$  par la symétrie  $\Gamma$ . De ce fait, il existe deux types de solutions : des solutions symétriques (ou invariantes) telles que  $\bar{\zeta}_s = \Gamma(\zeta_s) = \zeta_s$  et des solutions asymétriques telles que  $\bar{\zeta}_a = \Gamma(\zeta_a) \neq \zeta_a$ . Par exemple, le point singulier de type col-foyer  $S_0$  à l'origine de l'espace des phases  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$  est invariant puisque  $\Gamma(S_0) = S_0$ . Les deux col-foyers  $S_2$  et  $\bar{S}_2$  autour desquels se développent les spirales respectivement de droite et de gauche sont tels que  $\bar{S}_2 = \Gamma(S_2)$ . Il en est de même pour les deux cols  $S_1$  et  $\bar{S}_1$ , respectivement entre  $S_0$  et  $S_2$ , et entre  $S_0$  et  $\bar{S}_2$ .

L'attracteur multispirale représenté Fig. 1 est borné par une frontière toroïdale de genre 5 structurée autour des cinq points singuliers  $S_i$ , chaque point singulier étant au centre de l'un des cinq « trous » de la frontière toroïdale (Fig. 2). Les cinq points singuliers étant alignés, la configuration est dite  $A_3$ ,  $A$  pour alignés et 3 pour le nombre de points singuliers de types « foyer ». L'orientation du flot selon la forme canonique représentée Fig. 2 est en accord avec celle de la représentation choisie Fig. 1 pour l'attracteur multispirale.



**Figure 2.** Forme canonique  $A_3$  avec la représentation des quatre composantes  $\mathcal{P}_A$ ,  $\mathcal{P}_B$ ,  $\mathcal{P}_C$  et  $\mathcal{P}_D$  de la section de Poincaré.

### 3 Section de Poincaré et application de premier retour

Conformément à la théorie des frontières toroïdales, toute frontière toroïdale de genre  $g$  ( $g > 2$ ) conduit à une section de Poincaré à  $(g - 1)$  composantes, soit dans le cas de la forme canonique  $A_3$ , une section de Poincaré telle que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B \cup \mathcal{P}_C \cup \mathcal{P}_D. \quad (4)$$

Le flot visite les composantes selon la matrice de transition

$$T_{\mathcal{P}} = \begin{matrix} \mathcal{P}_A \\ \mathcal{P}_B \\ \mathcal{P}_C \\ \mathcal{P}_D \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

où un élément  $T_{\mathcal{P},ij} = 1$  signifie que le flot effectue une connection entre la composante  $\mathcal{P}_i$  et la composante  $\mathcal{P}_j$  sans passer par la section de Poincaré [4]. De ce fait, il peut être utile de distinguer les domaines  $\mathcal{G}_{|i}$  correspondant à ce qui émerge de la composante  $\mathcal{P}_i$ , des domaines  $\mathcal{G}_{|i}$  constitués de ce qui converge vers la composante  $\mathcal{P}_i$ .

À partir de la section de Poincaré, une application de premier retour présente le grand avantage de fournir une partition génératrice de l'attracteur, c'est-à-dire de décomposer l'attracteur en des domaines topologiquement inéquivalents; il s'agit d'une collection de branches. À chacune de ces branches est associée un symbole : un entier. L'ensemble de ces symboles est ensuite utilisé pour coder la trajectoire se développant sur un attracteur, un symbole étant attribué à chaque intersection avec la section de Poincaré en fonction de la branche visitée. Afin de bien distinguer les contributions de chaque composante  $\mathcal{P}_i$  de la section de Poincaré à l'application de premier retour, une variable  $\rho_n$  est construite comme suit :

1. l'intervalle visité de chaque composante  $\mathcal{P}_i$  est normalisé sur l'intervalle unité, 0 correspond alors à la plus petite distance au point singulier foyer servant de référence à la composante; l'ensemble des intersections est tel que  $\tilde{\rho}_n \in [0; 1]$ .
2. chaque intervalle est ensuite translaté selon la relation

$$\rho_n = \begin{cases} \tilde{\rho}_n + 0 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_A \\ \tilde{\rho}_n + 1 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_B \\ \tilde{\rho}_n + 2 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_C \\ \tilde{\rho}_n + 3 & \text{si } \phi_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{P}_D \end{cases} \quad (6)$$

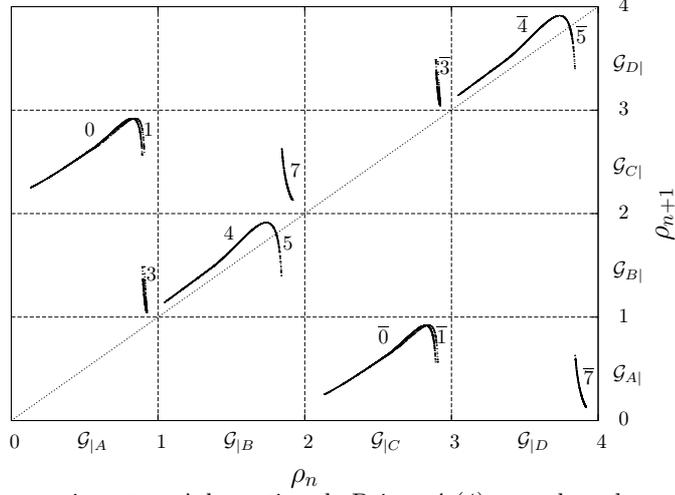
où  $\mathbf{x}_n = \phi_t(\mathbf{x}_0)$  désigne la  $n^{\text{e}}$  intersection de la trajectoire avec la section de Poincaré survenant au temps  $t$  à partir d'un jeu de conditions initiales  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$ .

Une telle construction a été implicitement utilisée par Gilmore et Letellier [2]. L'application de premier retour à la section de Poincaré construite sur  $\rho_n$  (Fig. 3) permet alors d'attribuer un entier à chaque branche, en numérotant de la gauche vers la droite, en associant un entier pair (impair) à chaque branche croissante (décroissante). Puisque nous avons  $\mathcal{P}_C = \Gamma(\mathcal{P}_A)$  et  $\mathcal{P}_D = \Gamma(\mathcal{P}_B)$ , nous numérotons les branches correspondant à ces composantes par des entiers « symétriques », c'est-à-dire que, par exemple, les trois symboles  $\{0, 1, 3\}$  de la composante  $\mathcal{P}_A$  deviennent  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}\}$  dans la composante  $\mathcal{P}_C = \Gamma(\mathcal{P}_A)$ .

Dans le cas de l'attracteur multispirale, nous avons un total de douze branches monotones sur l'application de premier retour (Fig. 3); le gabarit est donc constitué de douze branches interconnectant les quatre composantes de la section de Poincaré. Si nous considérons les domaines  $\mathcal{G}_{|i}$ , les branches se répartissent comme

- $\mathcal{G}_{|A}$  : 0, 1 et 3;
- $\mathcal{G}_{|B}$  : 4, 5 et 7;
- $\mathcal{G}_{|C}$  :  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$  et  $\bar{3}$ ;
- $\mathcal{G}_{|D}$  :  $\bar{4}$ ,  $\bar{5}$  et  $\bar{7}$ ,

ce qui s'obtient à partir d'une lecture « verticale » de l'application de premier retour. Si nous considérons les domaines  $\mathcal{G}_{|i}$ , nous avons



**Figure 3.** Application de premier retour à la section de Poincaré (4), avec le codage symbolique des différentes branches.

- $\mathcal{G}_A$  :  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$  et  $\bar{7}$  ;
- $\mathcal{G}_B$  : 4, 5 et 3 ;
- $\mathcal{G}_C$  : 0, 1 et 7 ;
- $\mathcal{G}_D$  :  $\bar{4}$ ,  $\bar{5}$  et  $\bar{3}$ ,

ce qui s’obtient à l’aide d’une lecture « horizontale » de l’application de premier retour. Par la suite nous nous focaliserons sur les domaines  $\mathcal{G}_i$  dont les mixeurs  $\mathcal{M}_i$  donneront l’organisation relative.

### 4 Gabarit et matrice d’enlacement

Un gabarit est une surface branchée permettant de reproduire l’organisation relative des orbites périodiques instables autour desquelles se structurent les trajectoires chaotiques. De ce point de vue, les orbites périodiques sont vues comme constituant le « squelette » des attracteurs. Lorsqu’un attracteur du type de Rössler [5] est borné par une frontière toroïdale de genre 1, la section de Poincaré possède une unique composante et il n’est pas nécessaire de distinguer différents mixeurs. De ce fait, le gabarit se décrit par une unique matrice d’enlacement  $M$  où les  $M_{ii}$  correspondent au nombre de demi-tours que présentent la  $i^e$  branche et les  $M_{ij}$  correspondent aux permutations entre la  $i^e$  branche et la  $j^e$  branche [9]. Nous adoptons pour construire cette matrice, la convention standard d’insertion [10].

Lorsque la frontière toroïdale de l’attracteur est de genre  $g > 2$ , la section de Poincaré présente  $(g - 1)$  composantes et les domaines  $\mathcal{G}_i$  indique les branches arrivant en ces composantes. Le gabarit est décomposé en autant de mixeurs  $\mathcal{M}_i$  que de composantes : chacun est alors décrit par une matrice d’enlacement des branches du domaine associé. Dans le cas de l’attracteur multispirale, chaque mixeur  $\mathcal{M}_i$  est constitué de trois branches : les matrices d’enlacement seront donc de dimension  $3 \times 3$ . Puisque le système (1) est pourvu d’une symétrie centrale, il suffit de déterminer deux des matrices,  $M_A$  et  $M_B$  par exemple, les deux autres sont alors obtenues en calculant le symétrique de ces matrices, puisque  $\mathcal{M}_C = \Gamma(\mathcal{M}_A) = \bar{\mathcal{M}}_A$  et  $\mathcal{M}_D = \Gamma(\mathcal{M}_B) = \bar{\mathcal{M}}_B$ . La matrice d’enlacement symétrique  $\bar{M}$  d’une matrice d’enlacement  $M$  est donnée par

$$\bar{M} = -M - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Chacun des éléments  $M_{ij}$  est déterminé comme suit. Les éléments  $M_{ii}$  sont calculés en utilisant deux segments différents de trajectoire visitant la  $i^e$  branche : le nombre de croisements orientés est alors égal à l'élément  $M_{ii}$ . Les éléments  $M_{ij}$  sont calculés de manière similaire en utilisant deux segments de trajectoires, l'un visitant la  $i^e$  branche et l'autre la  $j^e$  branche. Les quatre matrices d'enlacement sont alors

$$\begin{aligned}
 M_A &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{7} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, & M_B &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \\
 M_C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{et } M_D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Le gabarit correspondant à ces quatre matrices est représenté Fig. 4.

## 5 Orbites périodiques et nombre d'enlacement

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'attracteur se structure autour d'un squelette d'orbites périodiques qui peuvent être utilisées pour calculer des invariants topologiques tels que les nombres d'enlacement. Cet invariant s'obtient à partir de la projection régulière (pas plus de deux segments peuvent se croiser en un même point) d'un couple d'orbites périodiques et en prenant la demi-somme des intersections orientées [10,9]. Dans le cas présenté Fig. 5, le nombre d'enlacement

$$\begin{aligned}
 lk(\bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{5}, \\
 \bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{4}) = -6
 \end{aligned}$$

est obtenu.

Un gabarit correct de l'attracteur doit permettre de retrouver ce nombre d'enlacement. Selon la procédure développée par Le Sceller *et al.* [11], il est possible de calculer les croisements orientés et les nombres de ramifications pour chacun des mixeurs du gabarit, soit dans le cas présenté,

$$\begin{aligned}
 lk(\bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{5}, \\
 \bar{7} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 4 \ 7 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{0} \ 0 \ \bar{3} \ \bar{4} \ \bar{4} \ \bar{4}) \\
 = \frac{1}{2} (M + N_{\text{ram}}^A + N_{\text{ram}}^B + N_{\text{ram}}^C + N_{\text{ram}}^D) \\
 = \frac{1}{2} (-41 + 11 + 3 + 9 + 6) = -6.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Le nombre d'enlacement calculé à partir des orbites périodiques instables extraites est donc égal à celui estimé à l'aide du gabarit. Après avoir effectué une telle vérification pour un grand nombre de couples d'orbites périodiques, nous pouvons affirmer que le gabarit représenté Fig. 4 est validé.

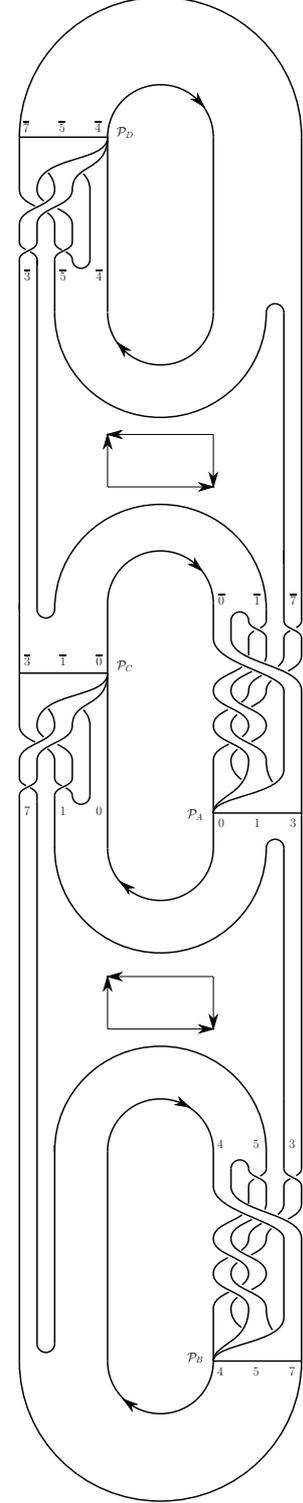
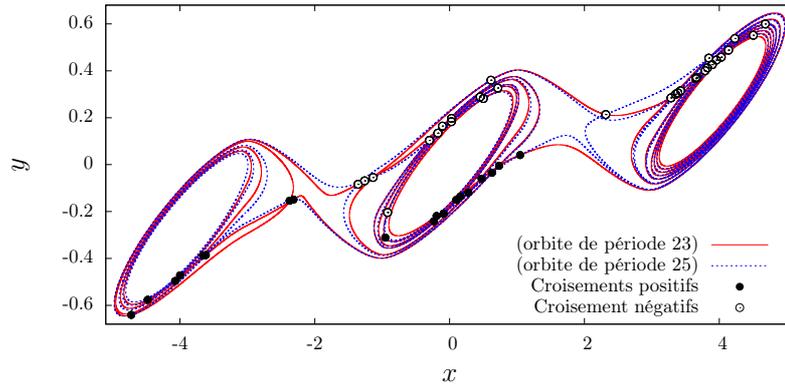


Figure 4. Gabarit de l'attracteur multispirale solution du système (1).



**Figure 5.** Deux orbites périodiques instables extraites de l'attracteur multispirale et leurs croisements orientés. Le nombre d'enlacement entre ces deux orbites est calculé numériquement : nous obtenons  $lk(\overline{7} \ 0 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{3} \ \overline{4} \ \overline{4} \ \overline{5}, \overline{7} \ 0 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{1} \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 4 \ 7 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{0} \ 0 \ \overline{3} \ \overline{4} \ \overline{4} \ \overline{4}) = -6$ .

## 6 Conclusion

Nous avons proposé une procédure permettant de décomposer le gabarit d'un attracteur chaotique borné par une frontière toroïdale de genre  $g$  ( $g > 2$ ) en  $(g - 1)$  mixeurs, chacun caractérisé par une matrice d'enlacement. Ces matrices d'enlacement sont déterminées une par une en utilisant des segments d'orbites appropriés. Les propriétés de symétrie peuvent être utilisées pour réduire le nombre de matrices à déterminer numériquement. Le gabarit dans son ensemble est ensuite validé à l'aide des nombres d'enlacement comme cela est habituellement fait. Nous avons illustré notre procédure dans le cas d'un attracteur multispirale à douze branches.

**Remerciements :** Les auteurs remercient Robert Gilmore pour ses conseils avisés.

## Références

1. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley (2002)
2. R. GILMORE & C. LETELLIER, *Symmetry of chaos*, Oxford University Press (2007)
3. C. LETELLIER, E. ROULIN & O. E. RÖSSLER, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 337-360 (2006)
4. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in  $\mathbb{R}^3$ , *Physical Review E*, **69**, 056206 (2004)
5. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976)
6. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & G. GOUESBET, Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E* **49** (4), 3492-3495 (1994)
7. A. AZIZ-ALAOUI, Differential equations with multispiral attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9** (6), 1009-1039 (1999)
8. L.O. CHUA & G.N. LIN, Canonical realization of Chua's circuit family, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **37** (7), 885-902 (1990)
9. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282 (1995)
10. N. B. TUFILLARO, T. ABBOTT & J. REILLY, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley (1992)
11. L. LE SCELLER, C. LETELLIER & G. GOUESBET, Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors, *Physical Review E*, **49** (5), 4693-4695 (1994)