

Topologie d'attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre élevé

Martin ROSALIE et Christophe LETELLIER

CORIA, UMR-6614 - Université de Rouen, Avenue de l'Université, BP 12, F-76801 Saint Etienne du Rouvray Cedex, France

Mots-clés : chaos, topologie, frontières toroïdales, gabarit.

Résumé

La topologie d'un attracteur plongé dans un espace tridimensionnel est complètement déterminée lorsqu'un gabarit, c'est-à-dire une surface branchée, est obtenue. Si une telle caractérisation topologique est relativement aisée pour les attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre 1, ceci est beaucoup plus technique pour ceux bornés par des frontières de genre élevé pour lesquels nous proposons ici une procédure générale, illustrée dans le cas d'un attracteur multispiralé borné par une frontière de genre 5.

Introduction. La théorie des frontières toroïdales [1] permet de classifier les attracteurs à partir de la nature et de la position des points singuliers du système. Ces frontières toroïdales ont un genre égal au nombre de points singuliers dont le voisinage est visité par le flot de telle sorte que ce dernier entoure le point considéré. Une description des attracteurs chaotiques se réalise à l'aide d'une section de Poincaré, d'application de premier retour et d'orbites périodiques [2]. Dans un premier temps nous allons introduire ces concepts bien maîtrisés pour les attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre 1. Ensuite nous expliquerons leurs adaptations pour l'étude d'attracteurs de genre supérieur. Enfin une généralisation de la méthode sera proposée et appliquée à un attracteur multispiralé.

Topologie d'un attracteur du système de Rössler. Le système d'équations différentielles, introduit par Rössler [3]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1)$$

a pour solution un attracteur chaotique (Fig 1a) pour un certain jeu de paramètres. Pour respecter la convention de la théorie des frontières, l'attracteur a subi une rotation d'angle π autour de l'axe y de telle sorte que son flot évolue dans le sens horaire. L'attracteur est structuré autour d'un point col dont les coordonnées sont (x_c, y_c, z_c) ; il est représenté Fig. 1a par le cercle blanc (\odot). Sa frontière toroïdale est de genre 1. Le second point singulier du système n'est pas pris en compte car son voisinage n'est pas entouré par le flot.

La *section de Poincaré* est ici définie par

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_c, -\dot{x}_n < 0\}, \quad (2)$$

et est représenté Fig. 1a par une ligne grisée. Dans la section de Poincaré, la variable ρ_n représente la distance normalisée entre la frontière intérieure et la coordonnée de la n^e intersection avec la section.

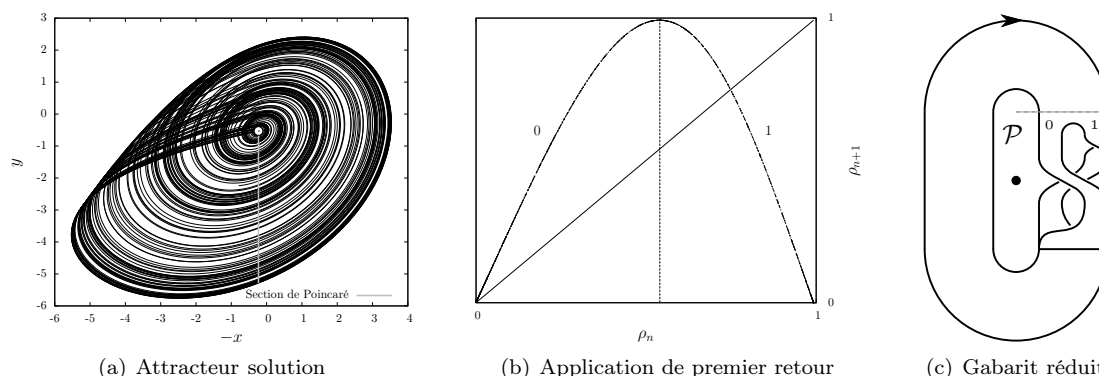


FIGURE 1 – Comportement chaotique solution du système de Rössler (1) pour $a = 0.43293$, $b = 2$ et $c = 4$.

Il est alors possible de construire une *application de premier retour* à partir de ρ_n (Fig. 1b). Elle est composée de deux branches : une branche croissante nommée « 0 » et une branche décroissante nommée « 1 ». Ces deux symboles permettent de coder toute trajectoire chaotique par une séquence de « 0 » et de « 1 ». À partir de l'application de premier retour, il est possible d'extraire les orbites périodiques instables structurant l'attracteur.

Le *gabarit* est une surface branchée [4] qui synthétise l'organisation relative des orbites périodiques instables. Le nombre d'enlacement entre deux orbites périodiques est le nombre de fois que ces orbites s'enroulent l'une autour de l'autre : il est possible de calculer numériquement ces nombres. En utilisant la procédure introduite par Le Sceller et al. [5], un gabarit peut être proposé de telle sorte qu'il vérifie tous ces nombres obtenus numériquement. Le gabarit de l'attracteur solution (Fig. 1c) a pour représentation duale la matrice d'enlacement

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

où les éléments R_{ii} désignent la torsion appliquée à la i^{e} branche et les R_{ij} ($i \neq j$) les permutations entre la i^{e} et la j^{e} branche.

Topologie d'un attracteur du système de Lorenz. Soit le système d'équations différentielles introduit par Lorenz [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}, \quad (4)$$

dont l'attracteur solution est représenté Fig. 2a, le flot évoluant dans le sens horaire. La forme canonique de sa frontière toroïdale est représentée Fig. 2b. Puisque la frontière est de genre $g = 3$, la section de Poincaré est alors constituée de $g - 1 = 2$ composantes (\mathcal{P}_A et \mathcal{P}_B). La première utilisation de ces deux composantes pour l'étude de ce système a été réalisée par Letellier *et al.* [7].

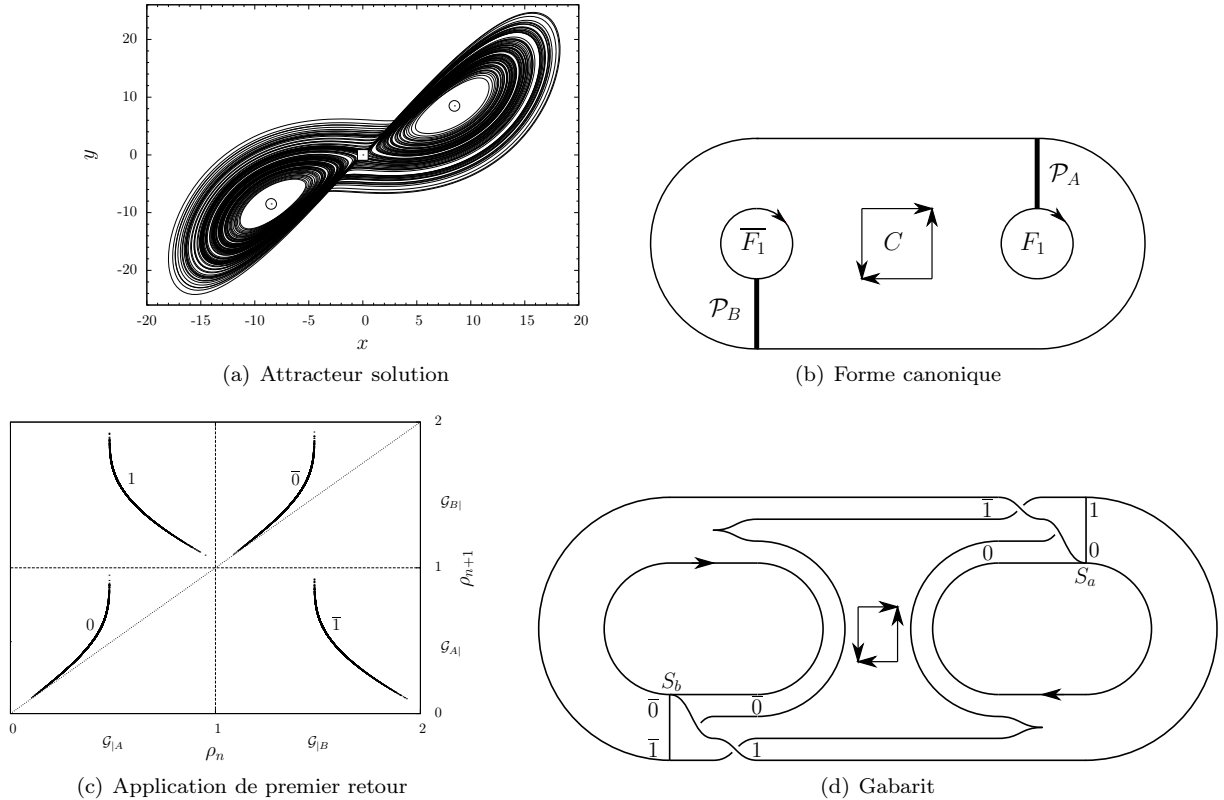


FIGURE 2 – Comportement chaotique solution du système de Lorenz (4) pour les valeurs des paramètres $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ et $\sigma = 10$. Les points singuliers sont représentés par des \odot pour les foyers et par des \square pour les cols.

Comme précédemment, une variable ρ_n est introduite pour construire l'application de premier retour à la section de Poincaré (Fig. 2c) [8]. Cette application est utilisée pour extraire des orbites périodiques instables et calculer leurs nombres d'enlacement respectifs. Le gabarit de l'attracteur de Lorenz est représenté (Fig. 2d) [1]. Nous supposons qu'il faut autant de matrices d'enlacement que de composantes dans la section de Poincaré pour décrire la topologie de l'attracteur. Nous avons alors généralisé la procédure de Le Sceller *et al.* pour pouvoir obtenir le nombre d'enlacement théorique entre deux orbites périodiques instables à partir de leurs codages symboliques. Pour l'attracteur de Lorenz, les deux matrices d'enlacement sont

$$L_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } L_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matrice de transition entre les branches étant

$$T_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices permettent de calculer théoriquement les nombres d'enlacement entre les orbites périodiques instables extraites.

Topologie d'un attracteur multispiralé. Les attracteurs multispiralés ont été introduits par Aziz-Alaoui [9]. Ce sont des attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre élevé ($g \geq 3$). Parmi eux, nous avons choisi un attracteur borné par une frontière toroïdale de genre 5 et solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha [y - x - f_3(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta x - \gamma y \end{cases} \quad (5)$$

où

$$f_3(x) = \begin{cases} m_0 x + \operatorname{sgn}(x) \xi_0 & \text{si } |x| \leq s_0 \\ m_1 x + \operatorname{sgn}(x) (m_0 - m_1) s_0 & \text{si } s_0 \leq |x| \leq s_1 \\ m_2 x + \operatorname{sgn}(x) [(m_1 - m_2) s_1 + (m_0 - m_1) s_0] & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

La fonction linéaire par morceaux permet d'engendrer de multiples spirales sur l'attracteur (Fig. 3a) dont le flot évolue dans le sens horaire autour des points cols.

En utilisant les règles précédemment établies, la section de Poincaré à quatre composantes, et l'application de premier retour sur la variable ρ_n à la section de Poincaré, nous avons extrait les orbites périodiques instables. Le gabarit (Fig. 3d) est alors complètement décrit par les matrices

$$M_A = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{7} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_D = \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{5} & \bar{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Topologie d'attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genres élevés. Nous proposons une méthode pour construire progressivement le gabarit d'un attracteur borné par une frontière toroïdale de genre élevé. Dans un premier temps, il faut établir la forme canonique de la frontière de l'attracteur en respectant la structure des points singuliers. Ensuite, l'application de premier retour à la section de Poincaré doit être construite sur une variable représentant chacune des composantes distinctement et en respectant l'orientation (de l'intérieur vers l'extérieur des frontières). À partir de l'application de premier retour, les orbites périodiques instables sont extraites. Pour comprendre progressivement la structure de l'attracteur, il est nécessaire de progresser par étapes et de distinguer les composantes des gabarits. Il faut ensuite extraire de très nombreuses orbites et les regrouper comme suit : celles qui restent cloisonnées autour d'un même foyer, puis celles autour de deux foyers, etc. Les premiers groupes d'orbites renseignent sur la topologie autour des foyers pris indépendamment les uns des autres. Il est possible de construire un gabarit résumant la topologie autour de chaque foyer comme cela a été fait pour les attracteurs bornés par des frontières toroïdales de genre 1. Ensuite, en passant aux groupes d'orbites cloisonnées autour de deux foyers, il est possible d'étendre les gabarits déjà construits de telle sorte qu'ils puissent aussi expliquer le passage d'un foyer à un autre. En répétant l'opération autant de fois qu'il y a de foyers, il est possible d'obtenir la topologie de l'ensemble de l'attracteur. Il est important de noter, qu'à chaque étape, une validation par calcul théorique des nombres d'enlacement est possible en utilisant la procédure de Le Sceller généralisée sur le groupe d'orbites considérées.

Conclusion. Nous avons développé une procédure générale de caractérisation topologique d'attracteurs chaotiques bornés par des frontières toroïdales de genre élevé ($g \geq 3$). Du genre de ces frontières, le nombre de composantes de la section de Poincaré peut être déduit. La forme canonique de la frontière toroïdale détermine l'organisation relative des composantes de la section de Poincaré. L'application de premier retour à la section de Poincaré est construite à partir d'une variable qui décrit distinctement chaque composante. Enfin, en utilisant les règles classiques d'établissement de la topologie d'attracteurs à partir des nombres d'enlacement d'orbites périodiques, nous pouvons établir les matrices d'enlacements des surfaces branchées en les composantes. Le gabarit est alors décrit par $g-1$ matrices d'enlacement et une matrice de transitions entre les différentes branches de l'application de premier retour. Le gabarit ainsi obtenu est *réduit* dans la mesure où il réalise la synthèse des torsions et autres mouvements du flot.

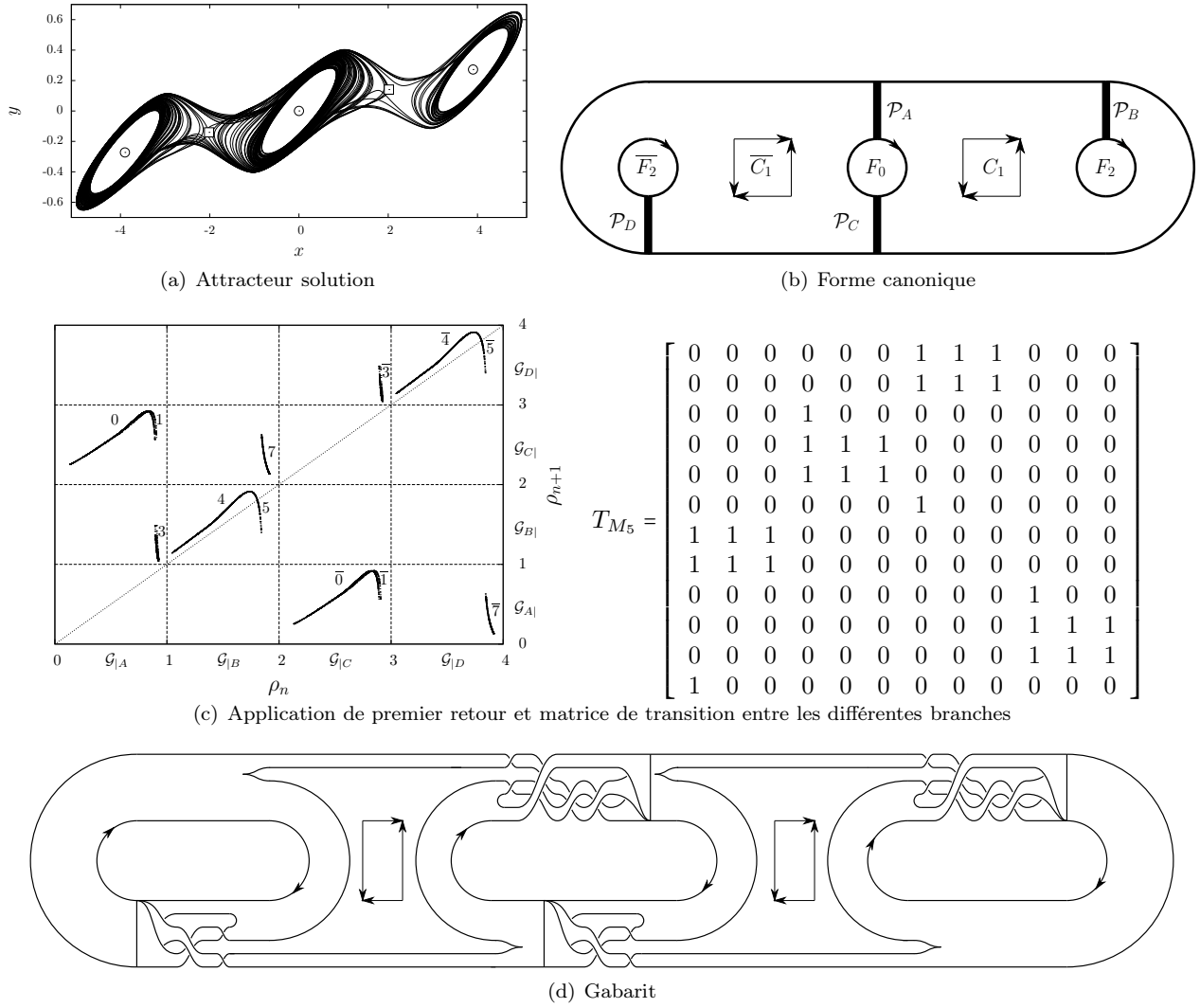


FIGURE 3 – Comportement chaotique multispiralé solution du système (5) pour $\alpha = 14, 6$, $\beta = 12$, $\gamma = 0, 9$, $\xi_0 = 0$, $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $m_0 = -5/7$, $m_1 = -8/7$ et $m_2 = -0,7$. Les points singuliers sont représentés par des \odot pour les foyers et par des \square pour les cols.

Références

- [1] T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in \mathbb{R}^3 , *Physical Review E*, **69**, 056206 (2004).
- [2] R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley (2002).
- [3] O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
- [4] J. BIRMAN & R. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in dynamical systems - I : Lorenz's equations, *Topology*, **22** (1), 47-82 (1983).
- [5] L. LE SCHELLER, C. LETELLIER & G. GOUESBET, Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors, *Physical Review E*, **49** (5), 4693-4695 (1994).
- [6] E. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141 (1963).
- [7] C. LETELLIER, P. DUTERTRE & G. GOUESBET, Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E*, **49** (4), 3492-3495 (1994).
- [8] G. BYRNE, R. GILMORE & C. LETELLIER, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70** (5), 056214 (2004).
- [9] A. AZIZ-ALAOUI, Differential equations with multispiral attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9** (6), 1009-1039 (1999).