

Un gabarit pour tous les attracteurs d'un diagramme de bifurcation du système de Rössler

M. Rosalie

Univ. Bordeaux, LaBRI, UMR-5800, 33400, Talence, France
 martin.rosalie@labri.fr

Résumé. Nous proposons d'établir les huit gabarits de huit attracteurs chaotiques issus d'un même diagramme de bifurcation. Nous montrons ensuite que ces huit gabarits sont tous sous-gabarits d'un même et unique gabarit à trois bandes. Nous obtenons ainsi une partition linéaire du diagramme de bifurcation décrite par une dynamique symbolique à trois symboles. Nous montrons enfin qu'un seul gabarit permet de décrire la structure topologique de tous les attracteurs du diagramme de bifurcation.

Abstract. We establish height templates of height attractors of a bifurcation diagram. These templates are subtemplate of a unique template with three strips. This allows us to establish a linear partition of the bifurcation diagram with a symbolic dynamic described by three symbols. Consequently, a unique template can describe the structure of bifurcation diagram's attractors

1 Introduction

Étudié à de nombreuses reprises depuis sa parution en 1976, le système de Rössler [1] présente les atouts d'un système chaotique simple tout en proposant des dynamiques riches qu'il reste à étudier. Les récents travaux sont des études des solutions de ce système lorsque les paramètres sont variés. Ils donnent ainsi une représentation plus globale de ce système. Par exemple, Castro *et al.* [2] réalisent des diagrammes détaillant les valeurs du plus grand exposant de Lyapunov en fonction des paramètres. Les travaux de Barrio *et al.* [3] caractérisent les bifurcations lorsque les trois paramètres du système sont variés. Les auteurs mettent ainsi en évidence le fait qu'il existe deux attracteurs co-existants pour un même jeu de paramètres dans le système de Rössler. Récemment, Sprott et Li [4] ont trouvé un autre moyen d'obtenir ces attracteurs en reparamétrisant le système de Rössler.

La caractérisation topologique d'un attracteur chaotique est une méthode qui permet d'obtenir la structure détaillée d'un seul attracteur. Lorsqu'un paramètre change, la méthode doit à nouveau être appliquée pour obtenir la structure d'un autre attracteur. Dans cet article, nous proposons d'étudier la structure de huit attracteurs choisis dans le diagramme de bifurcation de Sprott et Li [4]. Nous étudions dans un premier temps les propriétés de ces attracteurs avant de les comparer. Nous montrons qu'ils sont tous sous-gabarits d'un unique gabarit. Enfin, nous proposerons une partition linéaire du diagramme de bifurcation.

2 Diagramme de bifurcation

Barrio *et al.* [3] ont déjà montré que le système de Rössler [1] peut avoir comme solution deux attracteurs qui co-existent. Sprott et Li [4] construisent une paramétrisation des paramètres de telle sorte que lorsque $\alpha = 1$, les solutions du système de Rössler sont deux attracteurs qui coexistent ; cela donne le système de Rössler sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 0.2 + 0.09\alpha \\ b = 0.2 - 0.06\alpha \\ c = 5.7 - 1.18\alpha \end{cases} . \quad (1)$$

Nous réalisons une étude des solutions du système de Rössler pour plusieurs valeurs de paramètres. Pour cela nous utilisons une section de Poincaré construite à partir des points singuliers du système et donc des paramètres. La construction d'une telle section est détaillée dans [9]. Cette section de Poincaré

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-\} \quad (2)$$

dépend de la coordonnée x du point singulier au centre de l'attracteur notée x_- . En utilisant cette section de Poincaré, nous avons reproduit le diagramme de bifurcation obtenu par Sprott et Li (Figure 1). À partir de cette figure, nous avons choisi sept valeurs du paramètre traduisant un changement dans la structure du diagramme. Nous notons ainsi les huit attracteurs obtenus (Figure 2) :

$$\begin{array}{l|l|l|l} \mathcal{A} : \alpha = -0.25 & \mathcal{C} : \alpha = 0.78 & \mathcal{E}_1 : \alpha = 1 & \mathcal{F} : \alpha = 1.135 \\ \mathcal{B} : \alpha = 0.5 & \mathcal{D} : \alpha = 0.86 & \mathcal{E}_2 : \alpha = 1 & \mathcal{G} : \alpha = 1.22 \end{array} \quad (3)$$

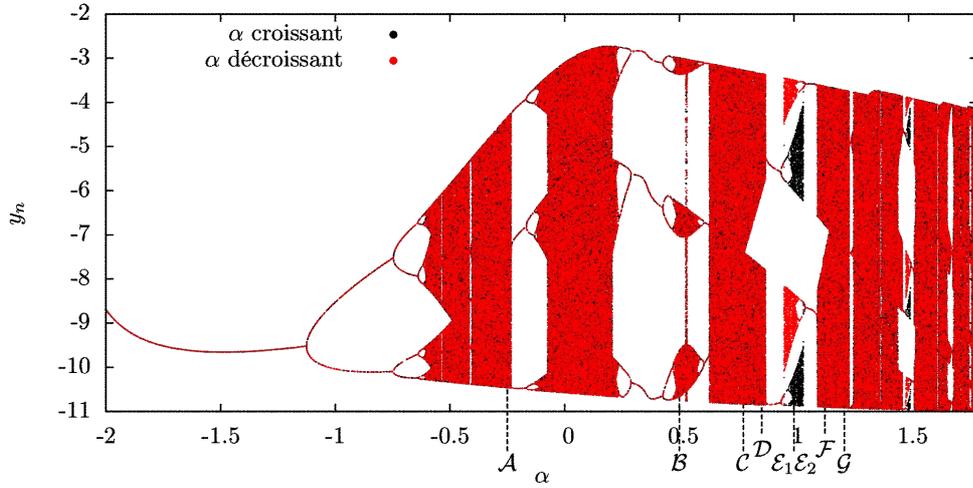


Figure 1. Diagramme de bifurcation avec α croissant en rouge et α décroissant en noir (reproduction de la Fig. 4 de [4]). \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{F} et \mathcal{G} désignent les huit attracteurs étudiés.

3 Huit gabarits

La caractérisation topologique est une méthode qui permet d'étudier la structure des attracteurs. Elle permet ainsi d'associer à un attracteur son gabarit qui décrit ses propriétés topologiques. Définie principalement par Gilmore *et al* [5,6], cette méthode consiste dans un premier temps à extraire les orbites de l'attracteur à partir d'une section de Poincaré. Ensuite, un invariant topologique (le nombre d'enlacement) est calculé entre chaque paire d'orbite. Il s'agit d'un entier qui indique comment deux nœuds (représentant ici les orbites) sont enroulés l'un autour de l'autre. Enfin, nous construisons un gabarit, c'est-à-dire une surface branchée décrivant la structure de l'attracteur. Ce dernier doit permettre de retrouver les mêmes nombres d'enlacement entre les orbites qu'il contient que ceux obtenus précédemment. Nous allons maintenant appliquer cette méthode aux huit attracteurs.

Voici les sections de Poincaré utilisées pour étudier les attracteurs : (4) pour \mathcal{A} , \mathcal{C} et \mathcal{G}

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-\} , \quad (4)$$

(5) pour \mathcal{D} , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 et \mathcal{F} :

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-, -\dot{x}_n < 0, y < -7\} , \quad (5)$$

et enfin (6) pour \mathcal{B} :

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-, -\dot{x}_n < 0, y < -9\} . \quad (6)$$

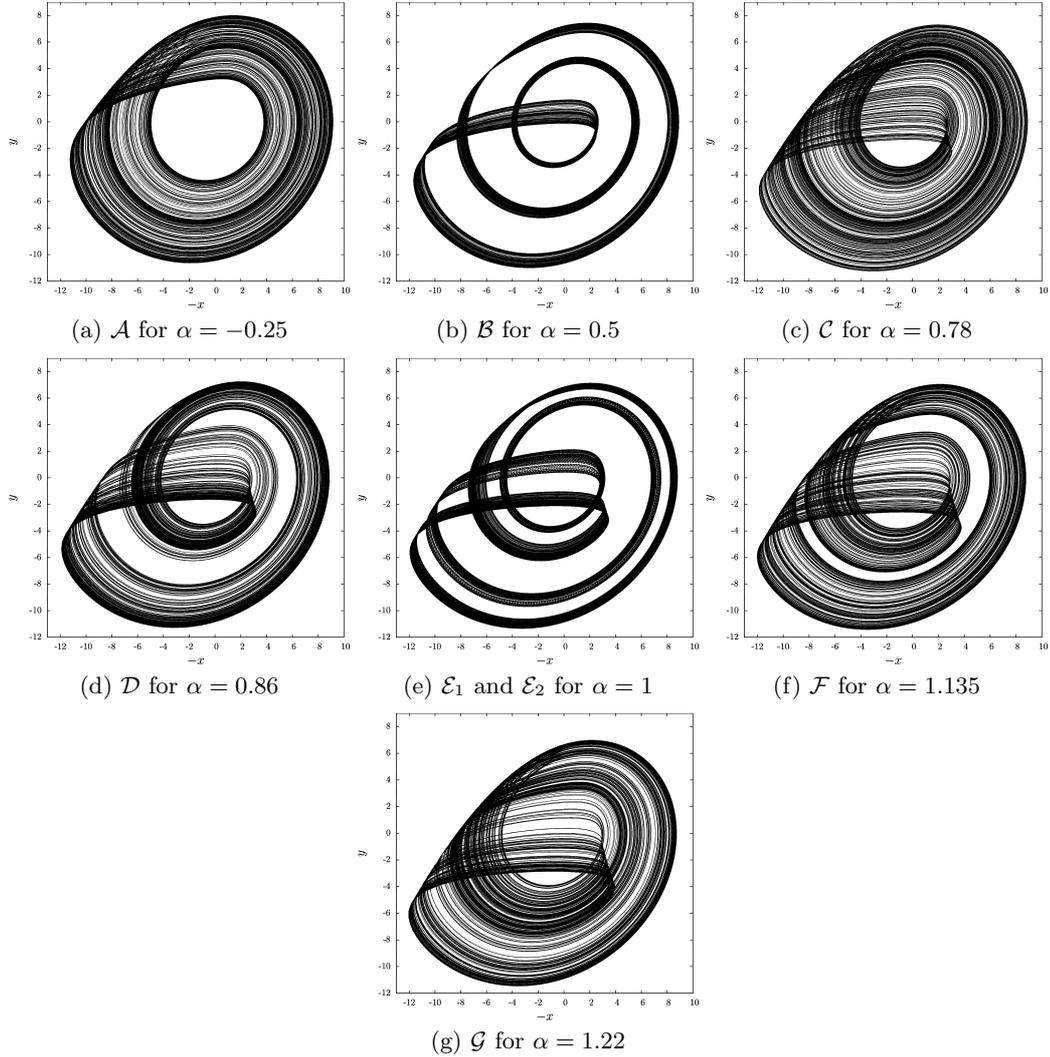


Figure 2. Huit attracteurs solutions du système de Rössler (1) ; le paramètre α est indiqué pour chacun.

Les tableaux 1 et 2 détaillent les éléments nécessaires à la caractérisation topologique. L'application de premier retour est établie à partir de la section de Poincaré. Tous les gabarits décrits par les matrices d'enlacement permettent de retrouver les nombres d'enlacement indiqués.

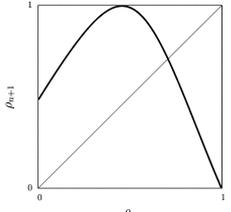
| Application de premier retour | Nombres d'enlacement | Matrice d'enlacement du gabarit | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---------------------------------|--------|---------|--------|---------|------|----|--|--|--|--------|----|----|--|--|---------|----|----|----|--|---------|----|----|----|-----|--|
| \mathcal{A}  | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>(1)</td> <td>(10)</td> <td>(1011)</td> <td>(10110)</td> </tr> <tr> <td>(10)</td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(1011)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(10110)</td> <td>-2</td> <td>-4</td> <td>-8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(10111)</td> <td>-2</td> <td>-4</td> <td>-8</td> <td>-10</td> </tr> </table> | | (1) | (10) | (1011) | (10110) | (10) | -1 | | | | (1011) | -2 | -3 | | | (10110) | -2 | -4 | -8 | | (10111) | -2 | -4 | -8 | -10 | $T(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ |
| | (1) | (10) | (1011) | (10110) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10) | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1011) | -2 | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10110) | -2 | -4 | -8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10111) | -2 | -4 | -8 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Table 1. Éléments de la caractérisation topologique de l'attracteur \mathcal{A} : l'application de premier retour est une signature de la dynamique, les nombres d'enlacement sont calculés numériquement et la matrice d'enlacement décrit la structure du gabarit.

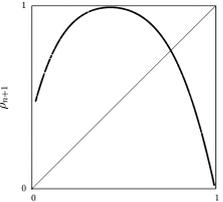
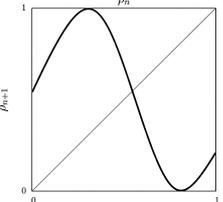
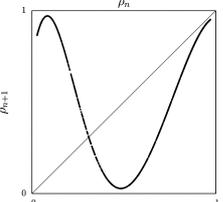
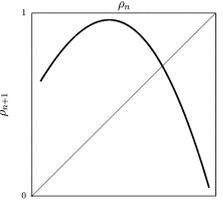
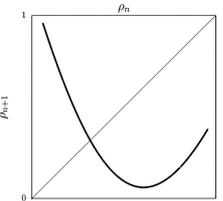
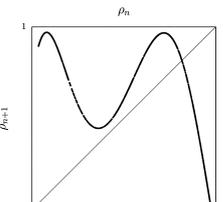
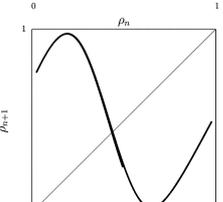
| | Application de premier retour | Nombres d'enlacement | Matrice d'enlacement du gabarit | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|---|---|---------------------------------|--------|--------|----------|--------|-------|-------|------|--------|-----|-------|----|----------|-----|------|--------|----------|-----|-----|-----|--------|---|-----|-----|-----|---------|----|-----|-------|-----|-----|---|----|--|--|-------|----|----|----|----|-----|--|-------|----|----|----|----|-----|-----|-------|----|----|----|----|-----|-----|-----|---|
| \mathcal{B} |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(10)</th> <th>(1011)</th> <th>(10110)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(10)</td> <td>-5</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(1011)</td> <td>-10</td> <td>-21</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(10110)</td> <td>-13</td> <td>-26</td> <td>-52</td> </tr> <tr> <td>(10111)</td> <td>-13</td> <td>-26</td> <td>-52</td> <td>-65</td> </tr> </tbody> </table> | (1) | (10) | (1011) | (10110) | (10) | -5 | | | (1011) | -10 | -21 | | (10110) | -13 | -26 | -52 | (10111) | -13 | -26 | -52 | -65 | $T(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1) | (10) | (1011) | (10110) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10) | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1011) | -10 | -21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10110) | -13 | -26 | -52 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10111) | -13 | -26 | -52 | -65 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| \mathcal{C} |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(10)</th> <th>(2010)</th> <th>(2011)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(10)</td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2010)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2011)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> </tr> <tr> <td>(1011)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td>-6</td> </tr> </tbody> </table> | (1) | (10) | (2010) | (2011) | (10) | -1 | | | (2010) | -2 | -3 | | (2011) | -2 | -3 | -6 | (1011) | -2 | -3 | -6 | -6 | $T(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1) | (10) | (2010) | (2011) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10) | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2010) | -2 | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2011) | -2 | -3 | -6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1011) | -2 | -3 | -6 | -6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| \mathcal{D} |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(221)</th> <th>(211)</th> <th>(2221)</th> <th>(2211)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(221)</td> <td>-4</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(211)</td> <td>-4</td> <td>-12</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2221)</td> <td>-5</td> <td>-15</td> <td>-15</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2211)</td> <td>-5</td> <td>-15</td> <td>-15</td> <td>-20</td> </tr> <tr> <td>(22110)</td> <td>-6</td> <td>-18</td> <td>-18</td> <td>-24</td> <td>-24</td> </tr> </tbody> </table> | (1) | (221) | (211) | (2221) | (2211) | (221) | -4 | | | | (211) | -4 | -12 | | | (2221) | -5 | -15 | -15 | | (2211) | -5 | -15 | -15 | -20 | (22110) | -6 | -18 | -18 | -24 | -24 | $T(\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -3 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1) | (221) | (211) | (2221) | (2211) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (221) | -4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (211) | -4 | -12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2221) | -5 | -15 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2211) | -5 | -15 | -15 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (22110) | -6 | -18 | -18 | -24 | -24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| \mathcal{E}_1 |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(10)</th> <th>(1011)</th> <th>(101111)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(10)</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(1011)</td> <td>-6</td> <td>-11</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(101111)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> </tr> <tr> <td>(101110)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> <td>-51</td> </tr> </tbody> </table> | (1) | (10) | (1011) | (101111) | (10) | -3 | | | (1011) | -6 | -11 | | (101111) | -9 | -17 | -34 | (101110) | -9 | -17 | -34 | -51 | $T(\mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1) | (10) | (1011) | (101111) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (10) | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1011) | -6 | -11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (101111) | -9 | -17 | -34 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (101110) | -9 | -17 | -34 | -51 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| \mathcal{E}_2 |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(21)</th> <th>(2111)</th> <th>(211111)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(21)</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2111)</td> <td>-6</td> <td>-11</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(211111)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> </tr> <tr> <td>(212111)</td> <td>-9</td> <td>-17</td> <td>-34</td> <td>-51</td> </tr> </tbody> </table> | (1) | (21) | (2111) | (211111) | (21) | -3 | | | (2111) | -6 | -11 | | (211111) | -9 | -17 | -34 | (212111) | -9 | -17 | -34 | -51 | $T(\mathcal{E}_2) = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1) | (21) | (2111) | (211111) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (21) | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2111) | -6 | -11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (211111) | -9 | -17 | -34 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (212111) | -9 | -17 | -34 | -51 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| \mathcal{F} |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>(3)</th> <th>(30)</th> <th>(31)</th> <th>(32)</th> <th>(313)</th> <th>(312)</th> <th>(322)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(30)</td> <td>-3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(31)</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(32)</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td>-6</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(313)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(312)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td>-12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(322)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td>-12</td> <td>-12</td> </tr> <tr> <td>(332)</td> <td>-4</td> <td>-9</td> <td>-9</td> <td>-8</td> <td>-12</td> <td>-12</td> <td>-12</td> </tr> </tbody> </table> | (3) | (30) | (31) | (32) | (313) | (312) | (322) | (30) | -3 | | | | | | (31) | -3 | -6 | | | | | (32) | -3 | -6 | -6 | | | | (313) | -4 | -9 | -9 | -8 | | | (312) | -4 | -9 | -9 | -8 | -12 | | (322) | -4 | -9 | -9 | -8 | -12 | -12 | (332) | -4 | -9 | -9 | -8 | -12 | -12 | -12 | $T(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \\ -4 & -3 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ |
| (3) | (30) | (31) | (32) | (313) | (312) | (322) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (30) | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (31) | -3 | -6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (32) | -3 | -6 | -6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (313) | -4 | -9 | -9 | -8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (312) | -4 | -9 | -9 | -8 | -12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (322) | -4 | -9 | -9 | -8 | -12 | -12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (332) | -4 | -9 | -9 | -8 | -12 | -12 | -12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| \mathcal{G} |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(21)</th> <th>(2111)</th> <th>(2021)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(21)</td> <td>-1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2111)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2021)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> </tr> <tr> <td>(2110)</td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-6</td> <td>-6</td> </tr> </tbody> </table> | (1) | (21) | (2111) | (2021) | (21) | -1 | | | (2111) | -2 | -3 | | (2021) | -2 | -3 | -6 | (2110) | -2 | -3 | -6 | -6 | $T(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (1) | (21) | (2111) | (2021) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (21) | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2111) | -2 | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2021) | -2 | -3 | -6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (2110) | -2 | -3 | -6 | -6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Table 2. Éléments de la caractérisation topologique des attracteurs \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{F} et \mathcal{G} (cf. tableau 1).

4 Huit sous-gabarits

Les gabarits \mathcal{C} et \mathcal{G} sont identiques ($T_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{G}}$). En utilisant les relations algébriques définies lors de précédents travaux [7,8] nous allons montrer que les six autres gabarits sont des sous-gabarits du gabarit de \mathcal{C} . Un sous-gabarit \mathcal{S} d'un gabarit \mathcal{T} , écrit $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, est un sous-ensemble topologique de \mathcal{T} qui, équipé de la restriction d'un semi-flot de \mathcal{T} vers \mathcal{S} , satisfait la définition d'un gabarit [10]. Trivialement nous avons $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{C}}$ car la matrice d'enlacement de \mathcal{A} est un sous-ensemble de celle de \mathcal{C} (Figure 3a).

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

De la même manière $T_{\mathcal{D}} \subset T_{\mathcal{F}}$. Pour montrer que les autres gabarits sont des sous-gabarits, nous utilisons le fait qu'une boucle dans le gabarit se traduit par deux torsions (cf. Fig 3 et 4 de [11]). Dans le cas présent, cela se traduit par l'ajout de deux torsions négatives pour le gabarit $T_{\mathcal{B}}$ ainsi qu'une torsion négative en passant dans l'une des bandes (Figure 3b). Le détail du calcul est donné dans l'équation (8). Il s'agit du même principe pour les attracteurs \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 (Figure 3c). Enfin, pour l'attracteur \mathcal{F} , il s'agit de deux passages successifs dans deux mixeurs étant des sous-ensemble de l'attracteur \mathcal{C} (Figure 3d). La concaténation des deux mixeurs (définie dans [8]) permet de retrouver la matrice d'enlacement de $T_{\mathcal{F}}$ (8).

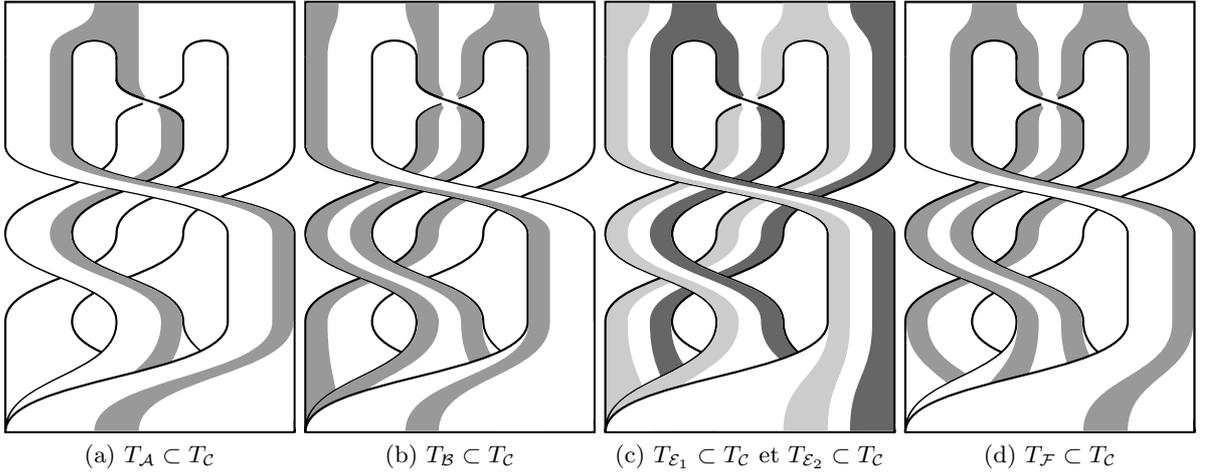


Figure 3. Sous-gabarits du gabarit de l'attracteur \mathcal{C} .

$$\begin{array}{c|c} T_{\mathcal{B}} \subset T_{\mathcal{C}} & T_{\mathcal{F}} \subset T_{\mathcal{C}} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + [-1] + [-2] + [-2] = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + [-2] = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \\ -4 & -3 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \quad (8)$$

5 Partition et dynamique symbolique du diagramme

Nous avons montré que les huit gabarits sont tous sous-gabarits du gabarit de \mathcal{C} muni de trois bandes. Nous avons réalisé une partition du diagramme de bifurcation en utilisant la section de Poincaré (2) en utilisant le découpage en trois bandes (Figure 4). Il en résulte une partition linéaire du diagramme :

$$\begin{aligned} y_{0|1}(\alpha) &= 1.43638\alpha - 6.76016 \\ y_{1|2}(\alpha) &= 2.18237\alpha - 11.1289 \end{aligned} \quad (9)$$

qui permet d'obtenir le symbole $\ll 0 \gg$, $\ll 1 \gg$ ou $\ll 2 \gg$ associé au passage dans la section de Poincaré. Cette dynamique symbolique peut s'appliquer à tous les attracteurs de ce diagramme.

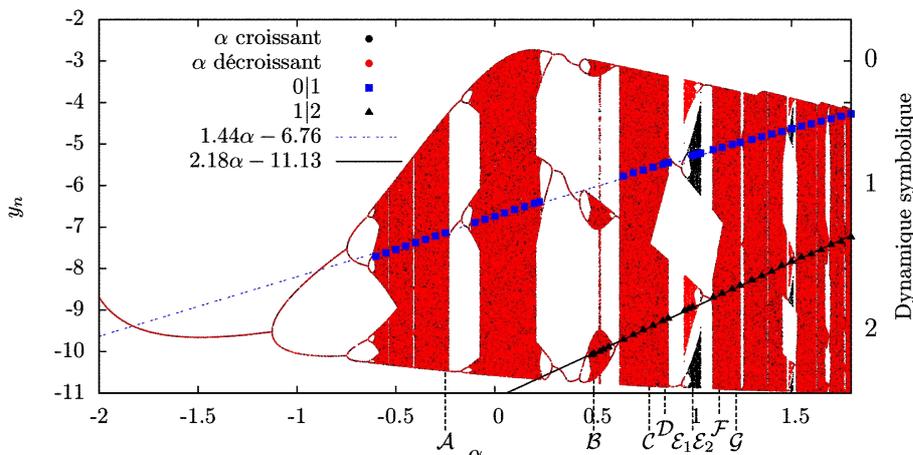


Figure 4. Partition du diagramme de bifurcation à partir la section de Poincaré (2). La dynamique symbolique à trois symboles ($\ll 0 \gg$, $\ll 1 \gg$ ou $\ll 2 \gg$) permet de décrire la dynamique associée à tous les attracteurs du diagramme. La partition dépend linéairement de la valeur de α (les valeurs sont obtenues par régression linéaire).

6 Conclusion

Étudier un système dynamique dans sa globalité permet de mieux comprendre les relations entre les différents régimes chaotiques qu'il peut produire. Dans le cas du système de Rössler et pour un diagramme de bifurcation donné, nous avons montré que la dynamique des attracteurs peut être décrite avec un unique gabarit. Tous les gabarits sont des sous-gabarits de ce gabarit. En fonction du paramètre de bifurcation, nous avons réalisé une partition du diagramme indiquant directement l'un des trois symboles de la dynamique. Cette démarche d'étude globale permet de proposer un seul gabarit pour un ensemble d'attracteurs. Elle simplifie alors la compréhension de la structure générale du système en proposant une unique représentation : *un gabarit pour un diagramme de bifurcation* décrit par la matrice d'enlacement

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Références

1. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57**(5), 397-398, 1976.
2. V. CASTRO, M. MONTI, W. B. PARDO, J. A. WALKENSTEIN & E. ROSA, Characterization of the Rössler system in parameter space, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **17**(3), 965-973, 2007.
3. R. BARRIO, F. BLESÀ & S. SERRANO, Qualitative analysis of the Rössler equations : Bifurcations of limit cycles and chaotic attractors, *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **238**(13), 1087-1100, 2009.
4. J. C. SPROTT & C. LI, Asymmetric bistability in the Rössler system, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, submitted.
5. R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Rev. of Modern Physics*, **70**(4), 1455, 1998.
6. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
7. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Systematic template extraction from chaotic attractors : I. Genus-one attractors with an inversion symmetry, *J. of Phys. A : Math. Theor.*, **46**(37), 375101, 2013.
8. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Systematic template extraction from chaotic attractors : II. Genus-one attractors with multiple unimodal folding mechanisms, *J. of Phys. A : Math. Theor.*, **48**(23), 235101, 2015.
9. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Toward a general procedure for extracting templates from chaotic attractors bounded by high genus torus, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**(04), 1450045, 2014.
10. R. W. GHRIST, P. J. HOLMES & M. C. SULLIVAN, Knots and links in three-dimensional flows, *Books, Monographs and Lecture Notes*, **1**, 1997.
11. C. LETELLIER, S. MEUNIER-GUTTIN-CLUZEL, & G. GOUESBET, Topological invariants in period-doubling cascades, *J. of Phys. A*, **33**, 1809-1825, 1999.